Prof. Dr. Ir. Joost-Pieter Katoen
Sebastian Junges, Benjamin Kaminski, David Korzeniewski, Tim Quatmann

Übung 4

Hinweise:

- Aufgrund des Feiertags am Donnerstag, den 10. Mai müssen die Lösungen bereits bis **Mittwoch, den 09. Mai um 16:00 Uhr** in den entsprechenden Übungskasten eingeworfen werden. Sie finden die Kästen am Eingang Halifaxstr. des Informatikzentrums (Ahornstr. 55).
- Da die Tutorien am Donnerstag, den 10. Mai ausfallen, können Sie in der Woche vom 7. bis 11. Mai eine andere Gruppe Ihrer Wahl besuchen.
- Die Übungsblätter **müssen** in Gruppen von je 3 Studierenden aus der gleichen Kleingruppenübung abgegeben werden.
- Drucken Sie ggf. digital angefertigte Lösungen aus. Abgaben z.B. per Email sind nicht zulässig.
- Namen und Matrikelnummer sowie die **Nummer der Übungsgruppe** sind auf jedes Blatt der Abgabe zu schreiben. Abgaben, die aus mehreren Blättern bestehen **müssen geheftet bzw. getackert** werden! Die **Gruppennummer muss sich auf der ersten Seite oben links** befinden.
- **Bei Nichtbeachten der obigen Hinweise müssen Sie mit erheblichen Punktabzügen rechnen!**

Aufgabe 1 (Trinäre Suche): (20 Punkte)

Betrachten Sie folgenden Algorithmus, der als Eingabe ein **aufsteigend sortiertes** Array E der Länge $n > 0$ bekommt.

```
bool triSearch(int E[], int K) {
int left = 0, right = E.length - 1;
  while (left <= right) {
    int lmid = ceil((2 * left + right) / 3); \\ runde auf
    int rmid = floor((left + 2 * right) / 3); \\ runde ab
    if (E[lmid] == K || E[rmid] == K) {
      return true;
    }
    if (E[lmid] > K) {
      right = lmid - 1;
    } else {
      if (E[rmid] < K) {
        left = rmid + 1;
      } else {
        left = lmid + 1;
        right = rmid - 1;
      }
    }
  return false;
}
```

Bestimmen Sie die maximale Anzahl $S(n)$ der Schleifendurchläufe bei einer erfolglosen Suche. Leiten Sie dazu zunächst eine Rekursionsgleichung für $S(n)$ her und lösen Sie diese **exakt** (d.h. nicht asymptotisch).

Hinweise:

- Betrachten Sie zum Lösen der Rekursionsgleichung den Spezialfall $n = \frac{3^k - 1}{2}$ und gehen Sie analog zur Analyse der Binärsuche vor.

Aufgabe 2 (Bilineare Suche): (5 + 5 + 10 = 20 Punkte)

Betrachten Sie folgende Variante der bilinearen Suche (siehe auch Vorlesung 4, Folie 16):

```
1 int bilinSearch(int E [], int K) {
2   int left = 0, right = E.length - 1;
3   while (left < right) {
4     if (E[left] != K || E[right] == K) { left = left + 1; }
5     if (E[right] != K || E[left] == K) { right = right - 1; }
6   }
7   return left;
8 }
```

Wir nehmen an, dass K in E genau einmal vorkommt und dass lediglich das Überprüfen der Schleifenbedingung (Zeile 3) eine Zeiteinheit kostet. Sei n die Länge des Arrays E.

a) Bestimmen Sie die Worst-Case Laufzeit $W(n)$. Begründen Sie Ihre Antwort.

b) Bestimmen Sie die Best-Case Laufzeit $B(n)$. Begründen Sie Ihre Antwort.

c) Bestimmen Sie die Average-Case Laufzeit $A(n)$ unter der Annahme, dass jede Position des Eintrags K in E gleich wahrscheinlich ist. Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 3 (Substitutionsmethode Reloaded): (5+5+10+8+9+8+1 = 46 Punkte)

Sei $\mathbb{X}$ eine beliebige Menge. Eine Relation $\sqsubseteq\, \subseteq \mathbb{X} \times \mathbb{X}$ heißt *Halbordnung* auf $\mathbb{X}$, wenn $\sqsubseteq$ eine anti-symmetrische Quasiordnung auf $\mathbb{X}$ ist. Wir nennen $(\mathbb{X}, \sqsubseteq)$ einen *vollständigen Verband*, falls jede Teilmenge $M \subseteq \mathbb{X}$ sowohl eine kleinste obere Schranke, als auch eine größte untere Schranke (jeweils im Sinne der Halbordnung $\sqsubseteq$) in $\mathbb{X}$ hat. Eine Funktion $\Psi\colon \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{X}$ heißt *monoton bezüglich* $\sqsubseteq$, falls für alle $x, y \in \mathbb{X}$ gilt:

$$x \sqsubseteq y \qquad \text{impliziert} \qquad \Psi(x) \sqsubseteq \Psi(y)\ .$$

Ein Element $z \in \mathbb{X}$ heißt *Fixpunkt von* Ψ, falls

$$\Psi(z) = z\ .$$

Das Prinzip der *Fixpunktinduktion* besagt folgendes: Wenn $(\mathbb{X}, \sqsubseteq)$ ein vollständiger Verband ist, $\Psi\colon \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{X}$ eine bezüglich $\sqsubseteq$ monotone Funktion ist, und es ein Element $x \in \mathbb{X}$ gibt, sodass

$$\Psi(x) \sqsubseteq x\ ,$$

dann hat Ψ einen Fixpunkt $p \in \mathbb{X}$ derart, dass

$$p \sqsubseteq x\ .$$

a) Es sei die Menge $\mathbb{T}$ definiert als

$$\mathbb{T} = \left\{ T \;\middle|\; T\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\} \right\}$$

und die Relation $\preceq$ definiert als

$$S \preceq T \qquad \text{genau dann, wenn} \qquad \forall n\colon \quad S(n) \leq T(n)\ .$$

Beweisen Sie, dass $(\mathbb{T}, \preceq)$ ein vollständiger Verband ist.

b) Es sei die Funktion $\Phi\colon \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{T}$ gegeben durch

$$\Phi(T)(n) = \begin{cases} 1, & \text{falls } n = 0 \\ 2 \cdot T\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + n, & \text{falls } n > 0. \end{cases}$$

Beweisen Sie, dass Φ monoton bezüglich $\preceq$ ist.

c) Beschreiben Sie, wie sich per Fixpunktinduktion zeigen lässt, dass für eine Rekursionsgleichung $T(n)$ gilt:

$$T(n) \in \mathcal{O}\big(f(n)\big)$$

d) Zeigen Sie per Fixpunktinduktion, dass für die Rekursionsgleichung

$$\begin{aligned} T(1) &= 1 \\ T(n) &= 2 \cdot T\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + n \,, \end{aligned}$$

gilt:

$$T(n) \in \mathcal{O}\big(2n \log_2(n)\big)$$

e) Zeigen Sie per Substitutionsmethode aus der Vorlesung, dass für die Rekursionsgleichung aus **d)** gilt:

$$T(n) \in \mathcal{O}(n^2)$$

f) Zeigen Sie die Aussage aus **e)** per Fixpunktinduktion.

g) Welche der Teilaufgaben fiel Ihnen leichter: **e)** oder **f)**? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 4 (Rekursionsbäume): (7 + 7 = 14 Punkte)

a) Stellen Sie einen Rekursionsbaum für die Rekursionsgleichung

$$\begin{aligned} T(0) &= 1 \\ T(1) &= 1 \\ T(n) &= 4 \cdot T\left(\left\lfloor \frac{n}{16} \right\rfloor\right) + n \end{aligned}$$

auf und erraten Sie anhand des Baumes eine asymptotisch korrekte Lösung der Rekursionsgleichung.

b) Beweisen Sie mit einer beliebigen Methode aus Vorlesung oder Übung, dass die von Ihnen erratene Lösung korrekt ist.