Prof. Dr. Ir. Joost-Pieter Katoen

Sebastian Junges, Benjamin Kaminski, David Korzeniewski, Tim Quatmann

Übung 4

– Musterlösung –

Hinweise:

- Aufgrund des Feiertags am Donnerstag, den 10. Mai müssen die Lösungen bereits bis **Mittwoch, den 09. Mai um 16:00 Uhr** in den entsprechenden Übungskasten eingeworfen werden. Sie finden die Kästen am Eingang Halifaxstr. des Informatikzentrums (Ahornstr. 55).
- Da die Tutorien am Donnerstag, den 10. Mai ausfallen, können Sie in der Woche vom 7. bis 11. Mai eine andere Gruppe Ihrer Wahl besuchen.
- Die Übungsblätter **müssen** in Gruppen von je 3 Studierenden aus der gleichen Kleingruppenübung abgegeben werden.
- Drucken Sie ggf. digital angefertigte Lösungen aus. Abgaben z.B. per Email sind nicht zulässig.
- Namen und Matrikelnummer sowie die **Nummer der Übungsgruppe** sind auf jedes Blatt der Abgabe zu schreiben. Abgaben, die aus mehreren Blättern bestehen **müssen geheftet bzw. getackert** werden! Die **Gruppennummer muss sich auf der ersten Seite oben links** befinden.
- **Bei Nichtbeachten der obigen Hinweise müssen Sie mit erheblichen Punktabzügen rechnen!**

Aufgabe 1 (Trinäre Suche): (20 Punkte)

Betrachten Sie folgenden Algorithmus, der als Eingabe ein **aufsteigend sortiertes** Array `E` der Länge $n > 0$ bekommt.

```
bool triSearch(int E[], int K) {
int left = 0, right = E.length - 1;
  while (left <= right) {
    int lmid = ceil((2 * left + right) / 3); \\ runde auf
    int rmid = floor((left + 2 * right) / 3); \\ runde ab
    if (E[lmid] == K || E[rmid] == K) {
      return true;
    }
    if (E[lmid] > K) {
      right = lmid - 1;
    } else {
      if (E[rmid] < K) {
        left = rmid + 1;
      } else {
        left = lmid + 1;
        right = rmid - 1;
      }
    }
  return false;
}
```

Bestimmen Sie die maximale Anzahl $S(n)$ der Schleifendurchläufe bei einer erfolglosen Suche. Leiten Sie dazu zunächst eine Rekursionsgleichung für $S(n)$ her und lösen Sie diese **exakt** (d.h. nicht asymptotisch).

Hinweise:

- Betrachten Sie zum Lösen der Rekursionsgleichung den Spezialfall $n = \frac{3^k-1}{2}$ und gehen Sie analog zur Analyse der Binärsuche vor.

Lösung:

Wir benutzen folgende Abkürzungen: $l = \texttt{left}$, $r = \texttt{right}$, $m_l = \texttt{lmid}$, $m_r = \texttt{rmid}$. Sei $n = r - l + 1$ die Länge des undurchsuchten Arrays zu Beginn eines Schleifendurchlaufs. Wir bestimmen zunächst die maximale Größe des undurchsuchten Arrays nach einem Schleifendurchlauf. Es gibt drei Fälle:

- Falls `E[lmid] > K`, dann ist die neue Größe
$$(m_l - 1) - l + 1 = m_l - l = \left\lceil \frac{2l + r}{3} \right\rceil - l = \left\lceil \frac{2l + r}{3} - l \right\rceil = \left\lceil \frac{r - l}{3} \right\rceil.$$
- Falls `E[rmid] < K`, dann ist die neue Größe
$$r - (m_r + 1) + 1 = r - m_r = r - \left\lfloor \frac{l + 2r}{3} \right\rfloor = r + \left\lceil -\frac{l + 2r}{3} \right\rceil = \left\lceil r - \frac{l + 2r}{3} \right\rceil = \left\lceil \frac{3r - (l + 2r)}{3} \right\rceil = \left\lceil \frac{r - l}{3} \right\rceil.$$
- Falls `E[lmid] < K < E[rmid]`, dann ist die neue Größe
$$(m_r - 1) - (m_l + 1) + 1 = m_r - m_l - 1 = \left\lfloor \frac{l + 2r}{3} \right\rfloor - \left\lceil \frac{2l + r}{3} \right\rceil - 1$$
Um zu zeigen, dass dieser Wert kleiner ist als die resultierende Größe aus den ersten beiden Fällen, schätzen wir ihn nach oben ab. Dabei nutzen wir, dass $\lfloor x \rfloor \leq x \leq \lceil x \rceil$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.
$$\begin{aligned} & \left\lfloor \frac{l + 2r}{3} \right\rfloor - \left\lceil \frac{2l + r}{3} \right\rceil - 1 \\ \leq\ & \frac{l + 2r}{3} - \left\lceil \frac{2l + r}{3} \right\rceil - 1 \\ \leq\ & \frac{l + 2r}{3} - \frac{2l + r}{3} - 1 = \frac{l + 2r - 2l - r}{3} - 1 = \frac{r - l}{3} - 1 \leq \left\lceil \frac{r - l}{3} \right\rceil. \end{aligned}$$

Demnach beträgt die Größe des undurchsuchten Arrays nach einem Schleifendurchlauf maximal
$$\left\lceil \frac{r - l}{3} \right\rceil = \left\lceil \frac{n - 1}{3} \right\rceil$$

Wir stellen folgende Rekursionsgleichung für $S(n)$ auf:
$$S(n) = \begin{cases} 0 & \text{falls } n = 0 \\ 1 + S(\lceil \frac{n-1}{3} \rceil) & \text{falls } n > 0 \end{cases}$$

Analog zur Analyse der Binärsuche (siehe Vorlesung 4) betrachten wir zunächst den Spezialfall $n = \frac{3^k - 1}{2}$ für ein $k > 0$. Dann gilt
$$\left\lceil \frac{n - 1}{3} \right\rceil = \left\lceil \frac{\frac{3^k - 1}{2} - 1}{3} \right\rceil = \left\lceil \frac{\frac{3^k - 3}{2}}{3} \right\rceil = \left\lceil \frac{3^{k-1} - 1}{2} \right\rceil = \frac{3^{k-1} - 1}{2}.$$

Es folgt
$$S(n) = S\left(\frac{3^k - 1}{2}\right) = 1 + S\left(\frac{3^{k-1} - 1}{2}\right).$$

Wir können ableiten, dass
$$S(n) = S\left(\frac{3^k - 1}{2}\right) = k + S\left(\frac{3^0 - 1}{2}\right) = k + S(0) = k.$$

Für beliebige $n \in \mathbb{N}$ vermuten wir, dass $S(n) = k$ falls

$$\frac{3^{k-1}}{2} \leq n < \frac{3^k}{2}$$
$$\iff 3^{k-1} \leq 2n < 3^k$$
$$\iff k-1 \leq \log_3(2n) < k$$

Daher vermuten wir für $n > 0$ folgende Lösung für die obige Rekursionsgleichung:

$$S(n) = \lfloor \log_3(2 \cdot n) \rfloor + 1 \tag{1}$$

Wir zeigen dies per Induktion über $n > 0$.

- Basis: $S(1) = 1 = \lfloor \log_3(2 \cdot 1) \rfloor + 1$
- Induktionsschritt: Sei $n > 1$. Dann:

$$\begin{aligned} S(n) = 1 + S\left(\left\lceil \frac{n-1}{3} \right\rceil\right) &= 1 + \left\lfloor \log_3\left(2 \cdot \left\lceil \frac{n-1}{3} \right\rceil\right)\right\rfloor + 1 \\ &= 1 + \left\lfloor \log_3\left(2 \cdot \left\lceil \frac{n-1}{3} \right\rceil\right) + 1\right\rfloor \\ &= 1 + \left\lfloor \log_3\left(2 \cdot \left\lceil \frac{n-1}{3} \right\rceil\right) + \log_3(3)\right\rfloor \\ &= 1 + \left\lfloor \log_3\left(\left\lceil \frac{n-1}{3} \right\rceil \cdot 6\right)\right\rfloor \end{aligned}$$

  Es ist immer entweder $n-1$, n oder $n+1$ durch drei teilbar. Wir unterscheiden diese drei Fälle:

  - Falls $n-1$ durch 3 teilbar ist, dann gilt $\lceil \frac{n-1}{3} \rceil = \frac{n-1}{3}$, d.h.,

$$\begin{aligned} S(n) &= 1 + \left\lfloor \log_3\left(\left\lceil \frac{n-1}{3} \right\rceil \cdot 6\right)\right\rfloor \\ &= 1 + \left\lfloor \log_3\left(\frac{n-1}{3} \cdot 6\right)\right\rfloor \\ &= 1 + \lfloor \log_3(2 \cdot (n-1)) \rfloor \\ &= 1 + \lfloor \log_3(2n-2) \rfloor \\ &= 1 + \lfloor \log_3(2n) \rfloor \end{aligned}$$

    Die letzte Umformung gilt, da $2n-2$ durch drei teilbar sein muss. Daher ist weder $2n-1$ noch $2n$ durch 3 teilbar, also insbesondere $2n-1 \neq 3^k$ und $2n \neq 3^k$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Sei $k \in \mathbb{N}$ so gewählt, dass $3^k \leq 2n-2 < 2n-1 < 2n < 3^{k+1}$. Dann ist

$$k = \log_3(3^k) \leq \log_3(2n-2) < \log_3(2n-1) < \log_3(2n) < \log_3(3^{k+1}) = k+1.$$

    Es folgt $k = \log_3(3^k) = \lfloor \log_3(2n-2) \rfloor = \lfloor \log_3(2n-1) \rfloor = \lfloor \log_3(2n) \rfloor < k+1$.

  - Falls n durch 3 teilbar ist, dann gilt $\lceil \frac{n-1}{3} \rceil = \frac{n}{3}$, d.h.,

$$\begin{aligned} S(n) &= 1 + \left\lfloor \log_3\left(\left\lceil \frac{n-1}{3} \right\rceil \cdot 6\right)\right\rfloor \\ &= 1 + \left\lfloor \log_3\left(\frac{n}{3} \cdot 6\right)\right\rfloor \\ &= 1 + \lfloor \log_3(2n) \rfloor \end{aligned}$$

– Falls $n+1$ durch 3 teilbar ist, dann gilt $\lceil \frac{n-1}{3} \rceil = \frac{n+1}{3}$, d.h.,

$$\begin{aligned} S(n) &= 1 + \left\lfloor \log_3 \left(\left\lceil \frac{n-1}{6} \right\rceil \cdot 3 \right) \right\rfloor \\ &= 1 + \left\lfloor \log_3 \left(\frac{n+1}{3} \cdot 3 \right) \right\rfloor \\ &= 1 + \lfloor \log_3 (2n+2) \rfloor \\ &= 1 + \lfloor \log_3 (2n) \rfloor \end{aligned}$$

Die letzte Umformung gilt ähnlich wie beim ersten Fall: Da $2n+2$ durch drei teilbar sein muss, ist $2n+1$ nicht durch drei teilbar. Außerdem ist $2n+2$ durch zwei teilbar und daher keine 3er Potenz. Es folgt $2n+2 \neq 3^k$ und $2n+1 \neq 3^k$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Es folgt für ein $k \in \mathbb{N}$ (analog zum ersten Fall): $k = \log_3(3^k) = \lfloor \log_3(2n) \rfloor = \lfloor \log_3(2n+1) \rfloor = \lfloor \log_3(2n+2) \rfloor < k+1$.

Damit ist Gleichung (1) bewiesen.

Aufgabe 2 (Bilineare Suche): (5 + 5 + 10 = 20 Punkte)

Betrachten Sie folgende Variante der bilinearen Suche (siehe auch Vorlesung 4, Folie 16):

```
1 int bilinSearch(int E [], int K) {
2   int left = 0, right = E.length - 1;
3   while (left < right) {
4     if (E[left] != K || E[right] == K) { left = left + 1; }
5     if (E[right] != K || E[left] == K) { right = right - 1; }
6   }
7   return left;
8 }
```

Wir nehmen an, dass `K` in `E` genau einmal vorkommt und dass lediglich das Überprüfen der Schleifenbedingung (Zeile 3) eine Zeiteinheit kostet. Sei n die Länge des Arrays `E`.

a) Bestimmen Sie die Worst-Case Laufzeit $W(n)$. Begründen Sie Ihre Antwort.

b) Bestimmen Sie die Best-Case Laufzeit $B(n)$. Begründen Sie Ihre Antwort.

c) Bestimmen Sie die Average-Case Laufzeit $A(n)$ unter der Annahme, dass jede Position des Eintrags `K` in `E` gleich wahrscheinlich ist. Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung:

a) Im Worst-Case befindet sich K an Position 0. Dann wird `right` von $n-1$ auf 0 dekrementiert. Die Schleifenbedingung wird also n mal überprüft. Daher gilt

$$W(n) = n.$$

Hinweise:

- Der Worst-Case wird auch erreicht, wenn sich der Eintrag K an Position $n-1$ befindet.

b) Im Best-Case befindet sich K an Position $m = \lfloor n/2 \rfloor$. Dann wird `left` von 0 auf m inkrementiert und `right` von $n-1$ auf m dekrementiert. Die Schleifenbedingung wird also

$$\max(m+1, n-m) = \max(\lfloor n/2 \rfloor + 1, n - \lfloor n/2 \rfloor) = \max(\lfloor n/2 \rfloor + 1, \lceil n/2 \rceil) = \lfloor n/2 \rfloor + 1$$

mal überprüft. Daher gilt

$$B(n) = \lfloor n/2 \rfloor + 1$$

c) Da es n Möglichkeiten für die Position vom Element `K` gibt, und jede Möglichkeit gleich wahrscheinlich ist, ist die Wahrscheinlichkeit, dass `K` an Position $i \in \{0, \dots, n\}$ liegt gegeben durch $1/n$. Falls `K` an Position i liegt gibt es

$$\max(i+1, n-i) = \begin{cases} i+1 & \text{, falls } i \geq \lfloor n/2 \rfloor \\ n-i & \text{, falls } i < \lfloor n/2 \rfloor \end{cases}$$

Schleifendurchläufe. Die Average-Case Laufzeit beträgt also

$$\begin{aligned} A(n) &= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n} \cdot \max(i+1, n-i) \\ &= \frac{1}{n} \left(\sum_{i=0}^{n-1} \max(i+1, n-i) \right) \\ &= \frac{1}{n} \left(\sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor - 1} (n-i) + \sum_{i=\lfloor n/2 \rfloor}^{n-1} (i+1) \right) \\ &= \frac{1}{n} \left(n + (n-1) + \dots + \underbrace{(n - (\lfloor n/2 \rfloor - 1))}_{=\lceil n/2 \rceil + 1} + (\lfloor n/2 \rfloor + 1) + (\lfloor n/2 \rfloor + 2) + \dots + n \right) \end{aligned}$$

- Falls n gerade, gilt $\lfloor n/2 \rfloor = n/2 = \lceil n/2 \rceil$ und daher

$$\begin{aligned} A(n) &= \frac{2}{n} \sum_{i=n/2+1}^{n} i \\ &= \frac{2}{n} \left(\sum_{i=0}^{n} i - \sum_{i=0}^{n/2} i \right) \\ &= \frac{2}{n} \left(\frac{n^2+n}{2} - \frac{n^2/4 + n/2}{2} \right) \\ &= \frac{1}{n} \left(n^2 + n - n^2/4 - n/2 \right) \\ &= n + 1 - n/4 - 1/2 \\ &= \frac{3}{4} n + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

- Der Fall das n ungerade ist ist analog (Beachte: $\lfloor n/2 \rfloor = (n-1)/2$ und $\lceil n/2 \rceil = (n+1)/2$):

$$\begin{aligned}
A(n) &= \frac{1}{n}\left(\frac{n-1}{2} + 1 + 2 \cdot \sum_{i=n/2+3/2}^{n} i\right)\\
&= \frac{2}{n}\left(\frac{n+1}{4} + \sum_{i=0}^{n} i - \sum_{i=0}^{n/2+1/2} i\right)\\
&= \frac{2}{n}\left(\frac{n+1}{4} + \frac{n^2+n}{2} - \frac{n^2/4 + 2n/4 + 1/4 + n/2 + 1/2}{2}\right)\\
&= \frac{1}{n}\left(n/2 + 1/2 + n^2 + n - n^2/4 - 2n/4 - 1/4 - n/2 - 1/2\right)\\
&= \frac{1}{n}\left(\frac{3}{4}n^2 + n/2 - 1/4\right)\\
&= \frac{3}{4}n + \frac{1}{2} - \frac{1}{4n}
\end{aligned}$$

______________________________.

Aufgabe 3 (Substitutionsmethode Reloaded): (5+5+10+8+9+8+1 = 46 Punkte)

Sei $\mathbb{X}$ eine beliebige Menge. Eine Relation $\sqsubseteq\, \subseteq \mathbb{X} \times \mathbb{X}$ heißt *Halbordnung* auf $\mathbb{X}$, wenn $\sqsubseteq$ eine anti-symmetrische Quasiordnung auf $\mathbb{X}$ ist. Wir nennen $(\mathbb{X}, \sqsubseteq)$ einen *vollständigen Verband*, falls jede Teilmenge $M \subseteq \mathbb{X}$ sowohl eine kleinste obere Schranke, als auch eine größte untere Schranke (jeweils im Sinne der Halbordnung $\sqsubseteq$) in $\mathbb{X}$ hat. Eine Funktion $\Psi\colon \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{X}$ heißt *monoton bezüglich* $\sqsubseteq$, falls für alle $x, y \in \mathbb{X}$ gilt:

$$x \sqsubseteq y \qquad \text{impliziert} \qquad \Psi(x) \sqsubseteq \Psi(y)\ .$$

Ein Element $z \in \mathbb{X}$ heißt *Fixpunkt von* Ψ, falls

$$\Psi(z) = z\ .$$

Das Prinzip der *Fixpunktinduktion* besagt folgendes: Wenn $(\mathbb{X}, \sqsubseteq)$ ein vollständiger Verband ist, $\Psi\colon \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{X}$ eine bezüglich $\sqsubseteq$ monotone Funktion ist, und es ein Element $x \in \mathbb{X}$ gibt, sodass

$$\Psi(x) \sqsubseteq x\ ,$$

dann hat Ψ einen Fixpunkt $p \in \mathbb{X}$ derart, dass

$$p \sqsubseteq x\ .$$

a) Es sei die Menge $\mathbb{T}$ definiert als

$$\mathbb{T} = \left\{ T \;\middle|\; T\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\} \right\}$$

und die Relation $\preceq$ definiert als

$$S \preceq T \qquad \text{genau dann, wenn} \qquad \forall\, n\colon\quad S(n) \leq T(n)\ .$$

Beweisen Sie, dass $(\mathbb{T}, \preceq)$ ein vollständiger Verband ist.

b) Es sei die Funktion $\Phi\colon \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{T}$ gegeben durch

$$\Phi(T)(n) \;=\; \begin{cases} 1, & \text{falls } n = 0 \\ 2 \cdot T\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + n, & \text{falls } n > 0. \end{cases}$$

Beweisen Sie, dass Φ monoton bezüglich $\preceq$ ist.

c) Beschreiben Sie, wie sich per Fixpunktinduktion zeigen lässt, dass für eine Rekursionsgleichung $T(n)$ gilt:

$$T(n) \;\in\; \mathcal{O}\big(f(n)\big)$$

d) Zeigen Sie per Fixpunktinduktion, dass für die Rekursionsgleichung

$$\begin{aligned} T(1) &= 1 \\ T(n) &= 2 \cdot T\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + n \,, \end{aligned}$$

gilt:

$$T(n) \;\in\; \mathcal{O}\big(2n\log_2(n)\big)$$

e) Zeigen Sie per Substitutionsmethode aus der Vorlesung, dass für die Rekursionsgleichung aus **d)** gilt:

$$T(n) \;\in\; \mathcal{O}(n^2)$$

f) Zeigen Sie die Aussage aus **e)** per Fixpunktinduktion.

g) Welche der Teilaufgaben fiel Ihnen leichter: **e)** oder **f)**? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung:

a) Wir müssen zeigen, dass $\preceq$ reflexiv, transitiv, und anti-symmetrisch ist.

$\preceq$ ist reflexiv: Für alle T gilt:

$$\begin{aligned} & \forall n\colon \quad T(n) \;=\; T(n) \\ \Longrightarrow \quad & \forall n\colon \quad T(n) \;\leq\; T(n) \\ \Longleftrightarrow \quad & T \;\preceq\; T \end{aligned}$$

$\preceq$ ist transitiv: Es seien $S, T, U \in \mathbb{X}$, sodass

$$S \;\preceq\; T \;\preceq\; U \,.$$

Daraus schlussfolgern wir:

$$\begin{aligned} & S \;\preceq\; T \;\preceq\; U \\ \Longleftrightarrow \quad & \forall n\colon \quad S(n) \;\leq\; T(n) \;\leq\; U(n) \\ \Longrightarrow \quad & \forall n\colon \quad S(n) \;\leq\; U(n) \\ \Longleftrightarrow \quad & S \;\preceq\; U \end{aligned}$$

$\preceq$ ist anti-symmetrisch: Es seien $S, T \in \mathbb{X}$, sodass

$$S \preceq T \qquad \text{und} \qquad T \preceq S\,.$$

Daraus schlussfolgern wir:

$$\begin{aligned}
& S \preceq T \qquad \text{und} \qquad T \preceq S \\
\Longleftrightarrow\quad & \forall n\colon \quad S(n) \leq T(n) \qquad \text{und} \qquad \forall n\colon \quad T(n) \leq S(n) \\
\Longleftrightarrow\quad & \forall n\colon \qquad S(n) \leq T(n) \quad \text{und} \quad T(n) \leq S(n) \\
\Longleftrightarrow\quad & \forall n\colon \quad S(n) = T(n) \\
\Longleftrightarrow\quad & S = T
\end{aligned}$$

Wir müssen nun noch zeigen, dass kleinste obere und größte untere Schranken gebildet werden können. Diese bilden wir punktweise, d.h. für eine Teilmenge $S \subseteq \mathbb{T}$ bilden wir das Supremum (kleinste obere Schranke) durch

$$\big(\sup\ S\big)(n) \;=\; \sup_{s \in S}\ s(n)$$

Das Supremum auf der rechten Seite existiert immer, da die Menge $\{s(n) \mid s \in S\}$ entweder nach oben beschränkt ist und somit ein Supremum in $\mathbb{R}$ existiert, oder aber die Menge ist unbeschränkt und das Supremum ist somit ∞.

Das Infimum von S bilden wir durch

$$\big(\inf\ S\big)(n) \;=\; \inf_{s \in S}\ s(n)$$

Das Infimum auf der rechten Seite existiert immer, da die Menge $\{s(n) \mid s \in S\}$ immer nach unten beschränkt ist, da die 0 das kleinste Element in $\mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$ ist.

b) Wir müssen zeigen: aus $S \preceq T$ folgt $\Phi(S) \preceq \Phi(T)$. Letzteres leiten wir wie folgt aus Ersterem ab:

$$\begin{aligned}
& \Phi(S) \preceq \Phi(T) \\
\Longleftrightarrow\quad & \forall n\colon \quad \Phi(S)(n) \leq \Phi(T)(n) \\
\Longleftrightarrow\quad & \forall n\colon \quad \begin{cases} 1, & \text{falls } n = 0 \\ 2 \cdot S\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + n, & \text{falls } n > 0. \end{cases} \leq \begin{cases} 1, & \text{falls } n = 0 \\ 2 \cdot T\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + n, & \text{falls } n > 0. \end{cases} \\
\Longleftarrow\quad & \forall n > 0\colon \quad 2 \cdot S\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + n \leq 2 \cdot T\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + n \\
\Longleftrightarrow\quad & \forall n > 0\colon \quad S\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) \leq T\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) \\
\Longleftarrow\quad & \forall n\colon \quad S(n) \leq T(n) \\
\Longleftrightarrow\quad & S \preceq T
\end{aligned}$$

c) Seien für $T(n)$ die Basisfälle $T(0) = r_0, \ldots, T(k) = r_k$ gegeben sowie der rekursive Fall

$$T(n) \;=\; g(T, n)\;,$$

wobei g eine Funktion ist, die sowohl von T als auch von n abhängt. Man stellt nun die folgende Funktion Ψ auf

$$\Psi(T)(n) \;=\; \begin{cases} r_0, & \text{falls } n = 0, \\ \vdots & \vdots \\ r_k, & \text{falls } n = k, \\ g(T,\ n), & \text{andernfalls.} \end{cases}$$

und zeigt, dass Ψ monoton bezüglich $\preceq$ ist.

Anschließend sucht man sich einen geeigneten Kandidaten $f' \in \Theta(f)$ und zeigt

$$\Psi(f') \;\preceq\; f' \;.$$

Dem Prinzip der Fixpunktinduktion folgend, hat man damit nämlich gezeigt, dass f' größer gleich einem Fixpunkt von Ψ und damit einer Lösung der Rekursionsgleichung T ist.

d) Wir benutzen die Funktion Φ aus Aufgabe **b)**, als Kandidaten $f'(n) = 1+2n\log_2(n)$ und zeigen $\Phi(f') \preceq f'$:

$$\begin{aligned}
\Phi(f')(n) &= \Phi(1+2n\log_2(n)) \\
&= \begin{cases} 1, & \text{falls } n = 0 \\ 2\cdot\left(1+2\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\log_2\left(\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right)\right)+n, & \text{falls } n > 0. \end{cases} \\
&= \begin{cases} 1, & \text{falls } n = 0 \\ 2\cdot\left(1+n\log_2\left(\frac{n}{2}\right)\right)+n, & \text{falls } n > 0. \end{cases} \\
&\overset{!}{\leq} 1+2n\log_2(n)
\end{aligned}$$

Für $n = 0$ ist die Ungleichung einfacherweise erfüllt. Wir betrachten also die Ungleichung für den Fall $n > 0$:

$$\begin{aligned}
2\cdot\left(1+n\log_2\left(\frac{n}{2}\right)\right)+n &\leq 1+2n\log_2(n) \\
2+2n\big(\log_2(n)-\log_2(2)\big)+n &\leq 1+2n\log_2(n) \\
1+2n\log_2(n)-2n+n &\leq 2n\log_2(n) \\
1-n &\leq 0
\end{aligned}$$

Letzteres stimmt für natürliche Zahlen $n > 0$.

e) Wir zeigen $T(n) \in \mathcal{O}(n^2)$, also es existiert $c > 0$ und n_0, sodass für alle $n \geq n_0$

$$T(n) \;\leq\; c\cdot n^2$$

gilt, per Induktion über n. Wir wählen dazu $c = 2$ und $n_0 = 0$.

Induktionsanfang: Für $n = 1$ gilt:

$$T(1) \;=\; 1 \leq 2 \;=\; 2\cdot 1^2 \;=\; c\cdot n^2$$

Induktionshypothese: Für ein beliebiges aber festes n gilt: Für alle $m < n$ gilt

$$T(m) \;\leq\; c\cdot m^2 \;.$$

Induktionsschritt: Wir schlussfolgern für $n > 0$ wie folgt:

$$\begin{aligned}
T(n) &= 2 \cdot T\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + n \\
&\overset{\text{I.H.}}{\leq} 2 \cdot c \cdot \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor^2 + n && (\text{da } \lfloor \tfrac{n}{2} \rfloor < n) \\
&\leq 2 \cdot c \cdot \left(\frac{n}{2}\right)^2 + n \\
&= 2 \cdot c \cdot \frac{n^2}{2 \cdot 2} + n \\
&= c \cdot \frac{n^2}{2} + n \\
&= 2 \cdot \frac{n^2}{2} + n \\
&= n^2 + n \\
&\leq n^2 + n^2 \\
&= 2n^2 \\
&= cn^2
\end{aligned}$$

f) Wir benutzen die Funktion Φ aus Aufgabe **b)** und als Kandidaten f' die Funktion

$$f'(n) = 1 + 4n^2 .$$

$f'(n)$ ist in $\mathcal{O}(n^2)$, weil

$$f'(n) = 1 + 4n^2 \leq 4n^2 + 4n^2 = 8n^2$$

für alle n. Wir setzen f' in Φ und zeigen $\Phi(f') \preceq f'$:

$$\begin{aligned}
\Phi(f')(n) &= \begin{cases} 1, & \text{falls } n = 0 \\ 2 \cdot \left(1 + 4\lfloor \frac{n}{2} \rfloor^2\right) + n, & \text{falls } n > 0. \end{cases} \\
&\leq \begin{cases} 1, & \text{falls } n = 0 \\ 2 \cdot \left(1 + 4(\frac{n}{2})^2\right) + n, & \text{falls } n > 0. \end{cases} \\
&= \begin{cases} 1, & \text{falls } n = 0 \\ 2 + 2n^2 + n, & \text{falls } n > 0. \end{cases} \\
&\overset{!}{\leq} 1 + 4n^2
\end{aligned}$$

Für $n = 0$ ist die Ungleichung einfacherweise erfüllt. Wir betrachten den Fall $n > 0$:

$$\begin{aligned}
& 2 + 2n^2 + n \overset{!}{\leq} 1 + 4n^2 \\
\iff \quad & 1 + n \leq 2n^2 \\
\iff \quad & 1 + n \leq n^2 + n^2
\end{aligned}$$

Letztere Ungleichung ist für alle n erfüllt.

g) Dem Autoren dieser Musterlösung fiel Aufgabe **f)** viel einfacher, da eine vergleichsweise komplizierte Induktion über n nicht nötig war. Insbesondere wird bei Fixpunktinduktion nur ein Induktionsschritt durchgeführt. Die Basisfälle müssen nicht gesondert betrachtet werden.

Aufgabe 4 (Rekursionsbäume): (7 + 7 = 14 Punkte)

a) Stellen Sie einen Rekursionsbaum für die Rekursionsgleichung

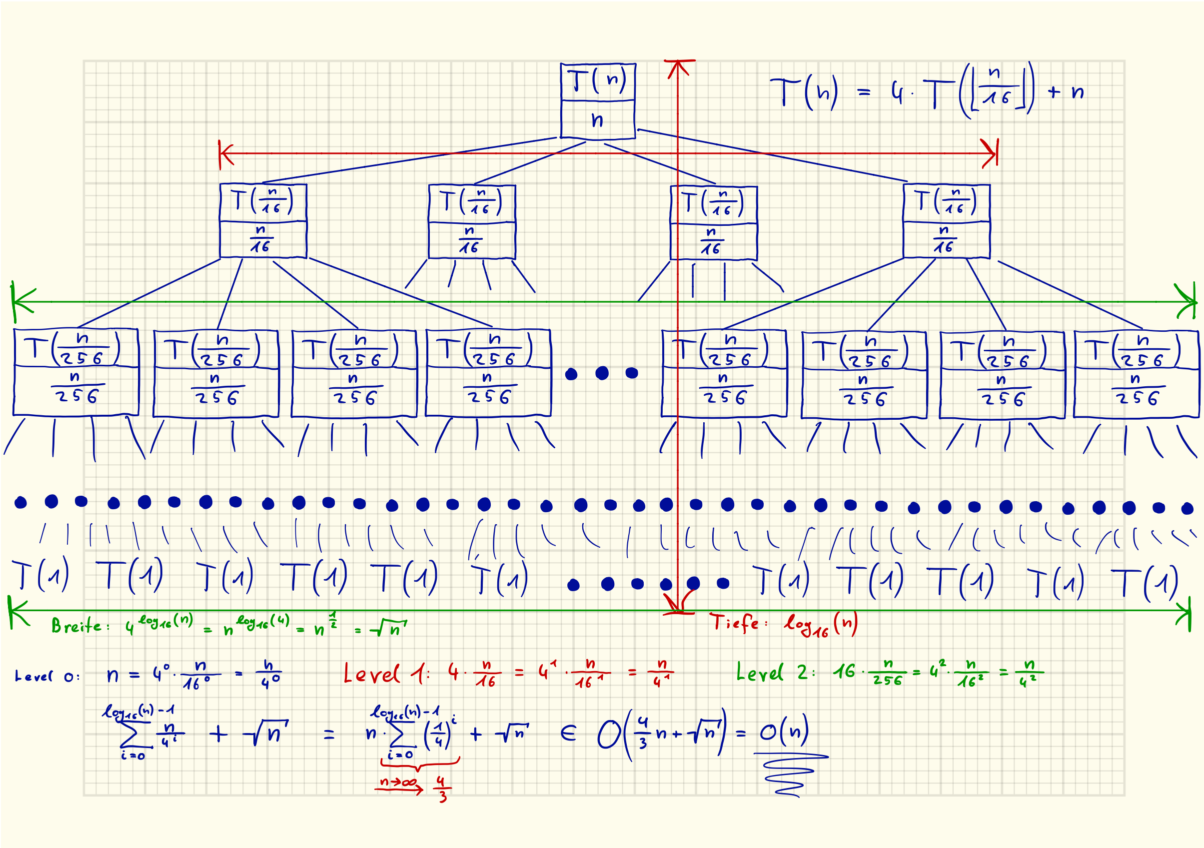
$$\begin{aligned} T(0) &= 1 \\ T(1) &= 1 \\ T(n) &= 4 \cdot T\left(\left\lfloor \frac{n}{16} \right\rfloor\right) + n \end{aligned}$$

auf und erraten Sie anhand des Baumes eine asymptotisch korrekte Lösung der Rekursionsgleichung.

b) Beweisen Sie mit einer beliebigen Methode aus Vorlesung oder Übung, dass die von Ihnen erratene Lösung korrekt ist.

Lösung:

a) Unten sehen wir den aufzustellenden Rekursionsbaum.



Wir erraten somit die asymptotische Lösung n.

b) Wir nutzen Fixpunktinduktion, stellen die Funktion Φ, gegeben durch

$$\Phi(T)(n) = \begin{cases} 1, & \text{falls } n = 0 \text{ oder } n = 1, \\ 4 \cdot T\left(\left\lfloor \frac{n}{16} \right\rfloor\right) + n, & \text{falls } n > 0, \end{cases}$$

auf, wählen als Kandidaten $f'(n) = 1 + 4n$, und zeigen $\Phi(f') \preceq f'$:

$$\begin{aligned}
\Phi(f')(n) &= \Phi(1+4n) \\
&= \begin{cases} 1, & \text{falls } n = 0 \text{ oder } n = 1, \\ 4 \cdot \left(1 + 4\left\lfloor \frac{n}{16} \right\rfloor\right) + n, & \text{falls } n > 0. \end{cases} \\
&\leq \begin{cases} 1, & \text{falls } n = 0 \text{ oder } n = 1, \\ 4 \cdot \left(1 + \frac{4n}{16}\right) + n, & \text{falls } n > 0. \end{cases} \\
&\overset{!}{\leq} 1 + 4n
\end{aligned}$$

Für $n = 0$ und $n = 1$ ist die Ungleichung einfacherweise erfüllt. Wir betrachten also die Ungleichung für den Fall $n > 1$:

$$\begin{aligned}
& 4 \cdot \left(1 + \frac{4n}{16}\right) + n \leq 1 + 4n \\
\Longleftrightarrow \quad & 4 + n + n \leq 1 + 4n \\
\Longleftrightarrow \quad & 3 \leq 2n
\end{aligned}$$

Letzteres gilt für alle natürliche Zahlen $n > 1$.