

# Datenstrukturen und Algorithmen

## Vorlesung 17: Kürzeste Pfade (K24)

Joost-Pieter Katoen

Lehrstuhl für Informatik 2  
Software Modeling and Verification Group

<https://moves.rwth-aachen.de/teaching/ss-18/dsal/>

25. Juni 2018

# Übersicht

## 1 Kürzeste Pfade

## 2 Single-Source Shortest Path

- Bellman-Ford
- Dijkstra

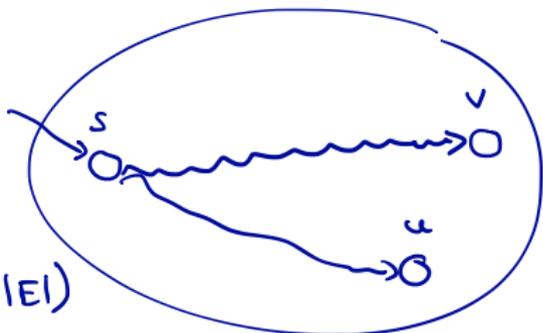
$$O(|V| \cdot |E|)$$

à la Prim "greedy"

$$O(|V| \cdot \log |V| + |E|)$$

## 3 All-Pairs Shortest Paths

- Transitive Hülle
- Algorithmus von Warshall
- Der Algorithmus von Floyd



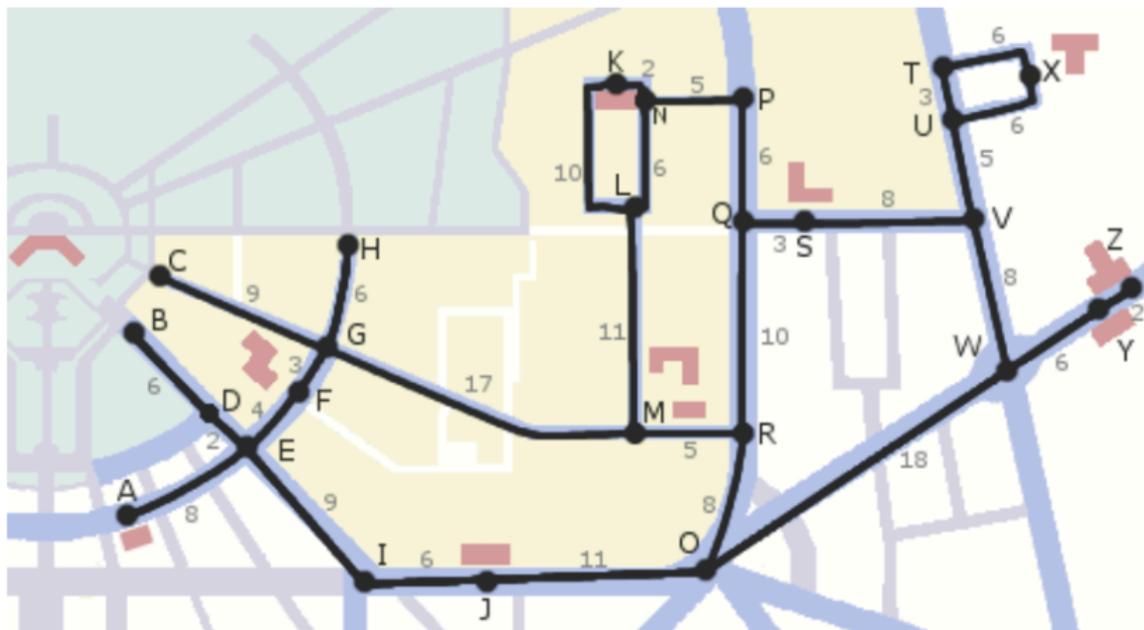
# Übersicht

- 1 Kürzeste Pfade
- 2 Single-Source Shortest Path
  - Bellman-Ford
  - Dijkstra
- 3 All-Pairs Shortest Paths
  - Transitive Hülle
  - Algorithmus von Warshall
  - Der Algorithmus von Floyd

# Das Rechenproblem: kürzeste Pfade



# Das Rechenproblem: kürzeste Pfade



# Andere Rechenprobleme: kürzester Weg

## Beispiel (kürzester Weg)

- Eingabe:**
1. Eine Straßenkarte, auf der der Abstand zwischen jedem Paar benachbarter Kreuzungen eingezeichnet ist,
  2. eine Startkreuzung  $s$ , und
  3. eine Zielkreuzung  $t$ .

**Ausgabe:** ~~Der~~ kürzeste Weg von  $s$  nach  $t$ .

Ein

# Kürzeste Pfade

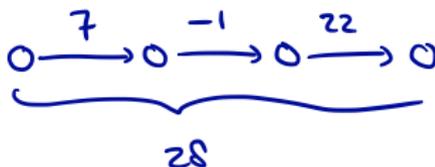
$$W: E \rightarrow \mathbb{R}$$

Gegeben sei ein (kanten-)gewichteter Graph  $G = (V, E, W)$ .

# Kürzeste Pfade

Gegeben sei ein (kanten-)gewichteter Graph  $G = (V, E, W)$ .

Das Gewicht eines Pfades ist die **Summe** der Gewichte seiner Kanten.



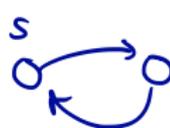
# Kürzeste Pfade

Gegeben sei ein (kanten-)gewichteter Graph  $G = (V, E, W)$ .

Das Gewicht eines Pfades ist die **Summe** der Gewichte seiner Kanten.

Ein **kürzester Pfad** von einem Knoten  $s \in V$  zu einem anderen Knoten  $v \in V$  ist ein Pfad von  $s$  nach  $v$  mit **minimalem Gewicht**.

# Kürzeste Pfade



v

$$\delta(s, v) = \infty$$

Gegeben sei ein (kanten-)gewichteter Graph  $G = (V, E, W)$ .

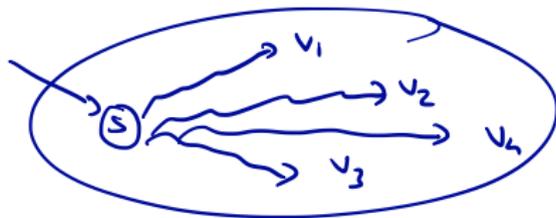
Das Gewicht eines Pfades ist die **Summe** der Gewichte seiner Kanten.

Ein **kürzester Pfad** von einem Knoten  $s \in V$  zu einem anderen Knoten  $v \in V$  ist ein Pfad von  $s$  nach  $v$  mit **minimalem Gewicht**.

Sei im Folgenden  $\delta : (V \times V) \rightarrow (\mathbb{R} \cup \{+\text{inf}\})$  eine Funktion, sodaß:

- ▶  $\delta(s, v)$  ist das Gewicht des kürzesten Pfades von  $s$  nach  $v$ , und
- ▶  $\delta(s, v) = +\text{inf}$  gdw.  $v$  von  $s$  nicht erreichbar ist.

# Kürzeste Pfade



Es gibt verschiedene Varianten:

- ▶ Kürzeste Pfade von einem Startknoten  $s$  zu allen anderen Knoten:  
Single-Source Shortest Paths (SSSP).

$$s \rightsquigarrow \forall v \in V \quad \forall v \in V$$

# Kürzeste Pfade

Es gibt verschiedene Varianten:

- ▶ Kürzeste Pfade von einem Startknoten  $s$  zu allen anderen Knoten: [Single-Source Shortest Paths](#) (SSSP).
- ▶ Kürzeste Pfade von allen Knoten zu einem Zielknoten  $t$ .

# Kürzeste Pfade

Es gibt verschiedene Varianten:

*Bellman-Ford  
&  
Dijkstra*

- ▶ Kürzeste Pfade von einem Startknoten  $s$  zu allen anderen Knoten: **Single-Source Shortest Paths** (SSSP).
- ▶ Kürzeste Pfade von allen Knoten zu einem Zielknoten  $t$ .  
Lässt sich auf SSSP zurückführen.

# Kürzeste Pfade

Es gibt verschiedene Varianten:

- ▶ Kürzeste Pfade von einem Startknoten  $s$  zu allen anderen Knoten: [Single-Source Shortest Paths \(SSSP\)](#).
- ▶ Kürzeste Pfade von allen Knoten zu einem Zielknoten  $t$ .  
Lässt sich auf SSSP zurückführen.
- ▶ Kürzeste Pfade für *ein* festes Knotenpaar  $u, v$ .

# Kürzeste Pfade

Es gibt verschiedene Varianten:

- ▶ Kürzeste Pfade von einem Startknoten  $s$  zu allen anderen Knoten: **Single-Source Shortest Paths (SSSP)**.
- ▶ Kürzeste Pfade von allen Knoten zu einem Zielknoten  $t$ .  
Lässt sich auf SSSP zurückführen.
- ▶ Kürzeste Pfade für *ein* festes Knotenpaar  $u, v$ .  
Es ist kein Algorithmus bekannt, der asymptotisch schneller als der beste SSSP-Algorithmus ist.

# Kürzeste Pfade

Es gibt verschiedene Varianten:

- ▶ Kürzeste Pfade von einem Startknoten  $s$  zu allen anderen Knoten: [Single-Source Shortest Paths \(SSSP\)](#).
- ▶ Kürzeste Pfade von allen Knoten zu einem Zielknoten  $t$ .  
Lässt sich auf SSSP zurückführen.
- ▶ Kürzeste Pfade für *ein* festes Knotenpaar  $u, v$ .  
Es ist kein Algorithmus bekannt, der asymptotisch schneller als der beste SSSP-Algorithmus ist.
- ▶ Kürzeste Pfade für *alle* Knotenpaare.

# Kürzeste Pfade

Es gibt verschiedene Varianten:

- ▶ Kürzeste Pfade von einem Startknoten  $s$  zu allen anderen Knoten:  
**Single-Source Shortest Paths (SSSP)**.
- ▶ Kürzeste Pfade von allen Knoten zu einem Zielknoten  $t$ .  
Lässt sich auf SSSP zurückführen.
- ▶ Kürzeste Pfade für *ein* festes Knotenpaar  $u, v$ .  
Es ist kein Algorithmus bekannt, der asymptotisch schneller als der beste SSSP-Algorithmus ist.
- ▶ Kürzeste Pfade für *alle* Knotenpaare.  
**All-Pairs Shortest Paths** (zweiter Teil dieser Vorlesung).

# Übersicht

- 1 Kürzeste Pfade
- 2 Single-Source Shortest Path
  - Bellman-Ford
  - Dijkstra
- 3 All-Pairs Shortest Paths
  - Transitive Hülle
  - Algorithmus von Warshall
  - Der Algorithmus von Floyd

# Single-Source Shortest Paths

## Problem (Single-Source Shortest Path)

Für einen gegebenen Knoten  $s \in V$  (die Quelle / source), bestimme für jeden anderen Knoten  $t \in V$ , der aus  $s$  erreichbar ist, einen kürzesten Pfad von  $s$  zu  $t$ .

# Übersicht

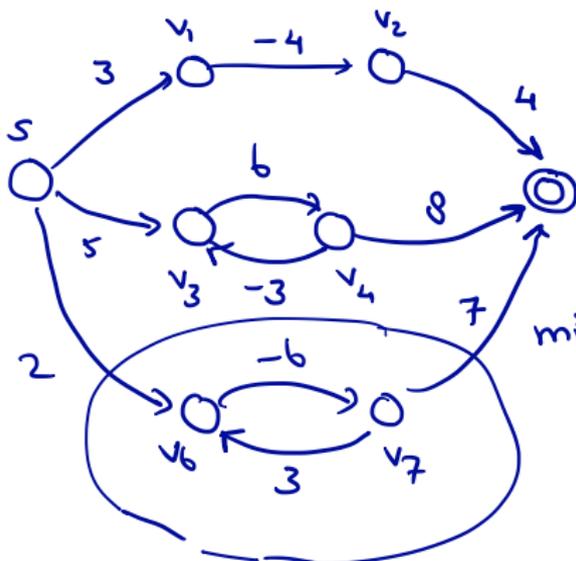
- 1 Kürzeste Pfade
- 2 Single-Source Shortest Path
  - Bellman-Ford
  - Dijkstra
- 3 All-Pairs Shortest Paths
  - Transitive Hülle
  - Algorithmus von Warshall
  - Der Algorithmus von Floyd

# Der Bellman-Ford Algorithmus

- ▶ Kürzeste Pfade bei einem **einzigem** Startknoten.

# Der Bellman-Ford Algorithmus

- ▶ Kürzeste Pfade bei einem **einzigem** Startknoten.
- ▶ Erlaubt **negative** Kantengewichte.



$$\delta(s, v_1) = 3$$

$$\delta(s, v_2) = -1$$

$$\delta(s, v_3) = 5$$

$$\delta(s, v_4) =$$

$$\min \{ s+b, s+(b-3) \cdot k, \\ k \geq 1 \}$$

$$= 11$$

$$\delta(s, v_7) = \min \{ 2-6, 2+(-6) \cdot k \mid k \geq 1 \} = -\infty$$

# Der Bellman-Ford Algorithmus

- ▶ Kürzeste Pfade bei einem **einzigem** Startknoten.
- ▶ Erlaubt **negative** Kantengewichte.
- ▶ Er zeigt an, ob es einen **Zyklus mit negativem Gewicht** gibt, der vom Startknoten aus erreichbar ist.

# Der Bellman-Ford Algorithmus

- ▶ Kürzeste Pfade bei einem **einzigem** Startknoten.
- ▶ Erlaubt **negative** Kantengewichte.
- ▶ Er zeigt an, ob es einen **Zyklus mit negativem Gewicht** gibt, der vom Startknoten aus erreichbar ist.
- ▶ Falls ein solcher Zyklus gefunden wird, gibt es **keine** Lösung
  - ▶ (da die Gewichte der kürzesten Pfade nicht mehr wohldefiniert sind).

# Der Bellman-Ford Algorithmus

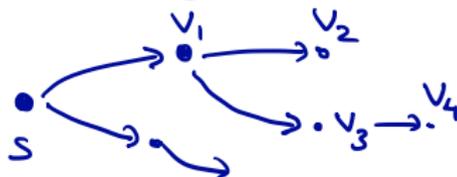
- ▶ Kürzeste Pfade bei einem **einzigem** Startknoten.
- ▶ Erlaubt **negative** Kantengewichte.
- ▶ Er zeigt an, ob es einen **Zyklus mit negativem Gewicht** gibt, der vom Startknoten aus erreichbar ist.
- ▶ Falls ein solcher Zyklus gefunden wird, gibt es **keine** Lösung
  - ▶ (da die Gewichte der kürzesten Pfade nicht mehr wohldefiniert sind).
- ▶ Sonst verbessert der Algorithmus iterativ für jeden Knoten  $v$  eine **obere Grenze  $\text{dist}[v]$**  an  $\delta(s, v)$ , bis das Minimum gefunden wird.

$$\delta(s, v) \leq \text{dist}[v]$$

# Der Bellman-Ford Algorithmus

- ▶ Kürzeste Pfade bei einem **einzigem** Startknoten.
- ▶ Erlaubt **negative** Kantengewichte.
- ▶ Er zeigt an, ob es einen **Zyklus mit negativem Gewicht** gibt, der vom Startknoten aus erreichbar ist.
- ▶ Falls ein solcher Zyklus gefunden wird, gibt es **keine** Lösung
  - ▶ (da die Gewichte der kürzesten Pfade nicht mehr wohldefiniert sind).
- ▶ Sonst verbessert der Algorithmus iterativ für jeden Knoten  $v$  eine **obere Grenze  $\text{dist}[v]$**  an  $\delta(s, v)$ , bis das Minimum gefunden wird.
- ▶ Kürzeste Pfade können nach Terminierung mittels die im Array **prev** gespeicherten **Vorgängerknoten** entlang eines kürzesten Pfades konstruiert werden.

SSSP-Baum



$$\text{prev}[v_2] = v_1$$

$$\text{prev}[v_1] = s$$

$$\text{prev}[s] = -1$$

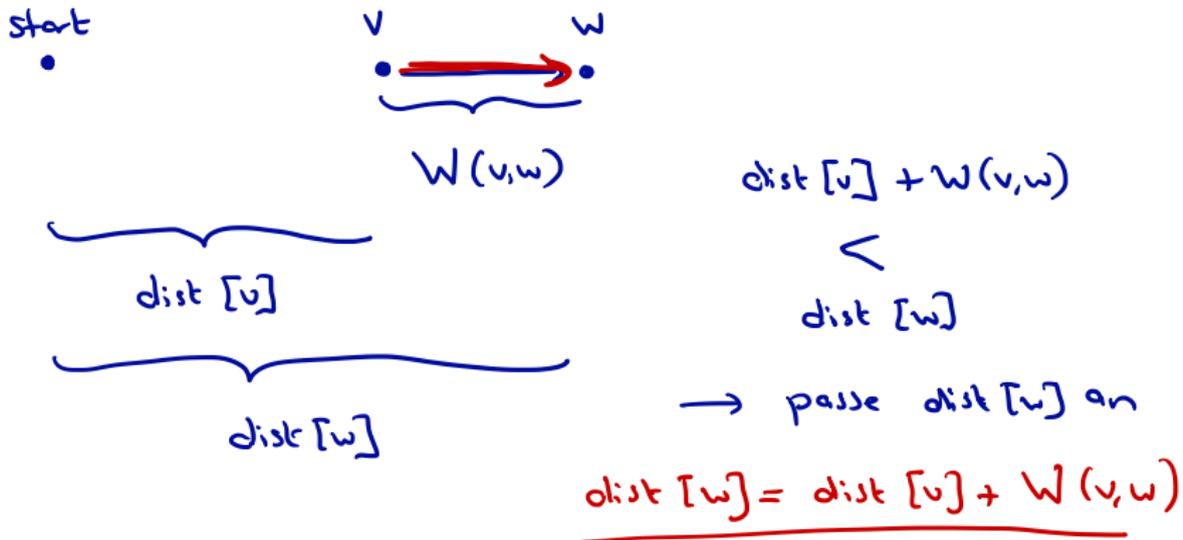
# Bellman-Ford: Idee

- ▶ Initialisierung:  $\text{dist}[v] = +\infty$ ,  $\text{dist}[\text{start}] = 0$ .

$$\delta(s, v) \leq \text{dist}[v]$$

# Bellman-Ford: Idee

- ▶ Initialisierung:  $\text{dist}[v] = +\infty$ ,  $\text{dist}[\text{start}] = 0$ .
- ▶ Für alle Kanten  $(v, w) \in E$ :
  - ▶ **Relaxierung**: Ist das bisher bekannte Gewicht  $\text{dist}[w]$  größer als  $\text{dist}[v] + W(v, w)$ , dann **verbessere**  $\text{dist}[w]$  auf diesen Wert.



# Bellman-Ford: Idee

- ▶ Initialisierung:  $\text{dist}[v] = +\infty$ ,  $\text{dist}[\text{start}] = 0$ .
- ▶ Für alle Kanten  $(v, w) \in E$ :
  - ▶ **Relaxierung**: Ist das bisher bekannte Gewicht  $\text{dist}[w]$  größer als  $\text{dist}[v] + W(v, w)$ , dann **verbessere**  $\text{dist}[w]$  auf diesen Wert.
- ▶ Wiederhole den vorigen Schritt bis sich nichts mehr ändert, bzw. breche ab, falls ein negativer Zyklus gefunden wurde.

# Bellman-Ford: Idee

- ▶ Initialisierung:  $\text{dist}[v] = +\infty$ ,  $\text{dist}[\text{start}] = 0$ .
- ▶ Für alle Kanten  $(v, w) \in E$ :
  - ▶ **Relaxierung**: Ist das bisher bekannte Gewicht  $\text{dist}[w]$  größer als  $\text{dist}[v] + W(v, w)$ , dann **verbessere**  $\text{dist}[w]$  auf diesen Wert.
- ▶ Wiederhole den vorigen Schritt bis sich nichts mehr ändert, bzw. breche ab, falls ein negativer Zyklus gefunden wurde.

## Korrektheit vom Bellman-Ford Algorithmus

Wenn nach  $|V|-1$  Iterationen noch Verbesserungen möglich sind, dann gibt es einen negativen Zyklus. Andernfalls  $\text{dist}[v] = \delta(s, v)$  für alle  $v \in V$ .

## Beweis.

Beweisidee: Ein Pfad ohne Zyklen in  $(V, E, W)$  hat eine Länge  $\leq |V|-1$ . □

# Bellman-Ford in Pseudo-Code

```

1 bool bellmanFord(List adj[n], int n, int start,
2   int &dist[n], int &prev[n]) {
3   for (int v = 0; v < n; v++) { // für alle Knoten v
4     dist[v] = +inf; // +inf ist initiale Entfernung von start zu v
5     prev[v] = -1; // v hat noch kein Vorgänger
6   }
7   dist[start] = 0; // die Entfernung von start zu start ist 0
8   for (int i = 1; i < n; i++) // n-1 Durchläufe
9     for (int v = 0; v < n; v++) // für alle Knoten v
10      foreach (edge in adj[v]) // für jede aus v ausgehende Kante
11        if (dist[edge.target] > dist[v] + edge.weight) {
12          dist[edge.target] = dist[v] + edge.weight;
13          prev[edge.target] = v;
14        } // Relaxierung
15   for (int v = 0; v < n; v++) // für alle Knoten v
16     foreach (edge in adj[v]) // für jede aus v ausgehende Kante
17       if (dist[edge.target] > dist[v] + edge.weight)
18         return false; // es existiert Zyklus mit negativem Gewicht
19   return true;
20 }

```



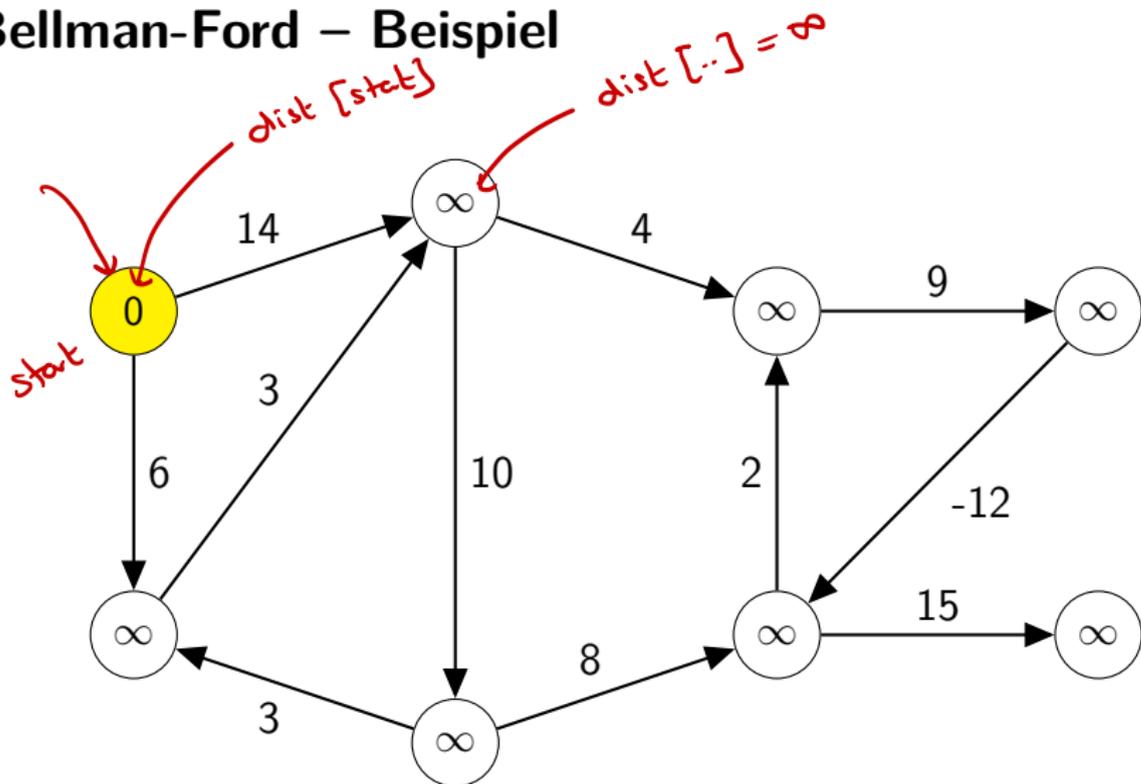
$\text{dist}[v] = \delta(\text{start}, v)$       prev speichert diesen SP-Baum

# Bellman-Ford in Pseudo-Code

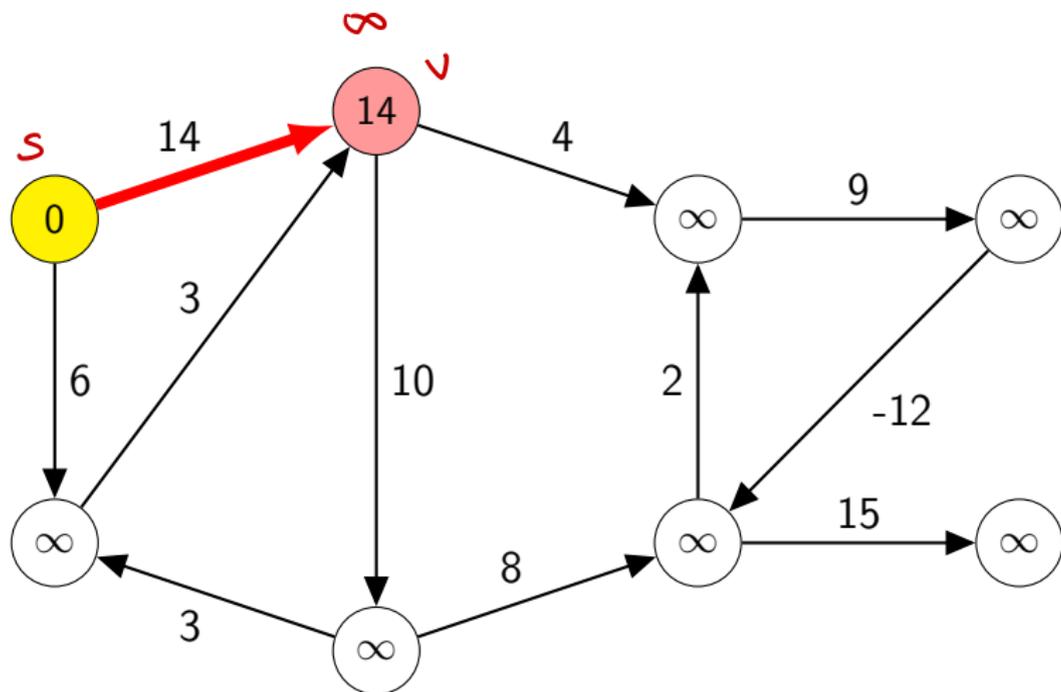
```
1 bool bellmanFord(List adj[n], int n, int start,
2   int &dist[n], int &prev[n]) {
3   for (int v = 0; v < n; v++) { // für alle Knoten v
4     dist[v] = +inf; // +inf ist initiale Entfernung von start zu v
5     prev[v] = -1; // v hat noch kein Vorgänger
6   }
7   dist[start] = 0; // die Entfernung von start zu start ist 0
8   for (int i = 1; i < n; i++) // n-1 Durchläufe
9     for (int v = 0; v < n; v++) // für alle Knoten v
10      foreach (edge in adj[v]) // für jede aus v ausgehende Kante
11        if (dist[edge.target] > dist[v] + edge.weight) {
12          dist[edge.target] = dist[v] + edge.weight;
13          prev[edge.target] = v;
14        } // Relaxierung
15   for (int v = 0; v < n; v++) // für alle Knoten v
16     foreach (edge in adj[v]) // für jede aus v ausgehende Kante
17       if (dist[edge.target] > dist[v] + edge.weight)
18         return false; // es existiert Zyklus mit negativem Gewicht
19   return true;
20 }
```

► Zeitkomplexität:  $O(|V| \cdot |E|)$ .

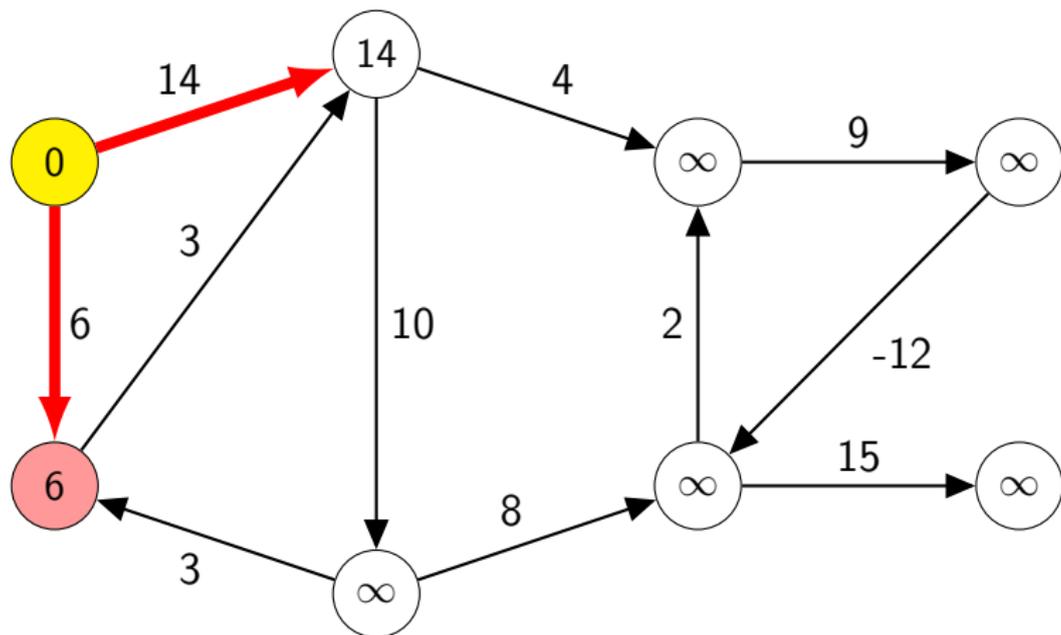
## Bellman-Ford – Beispiel



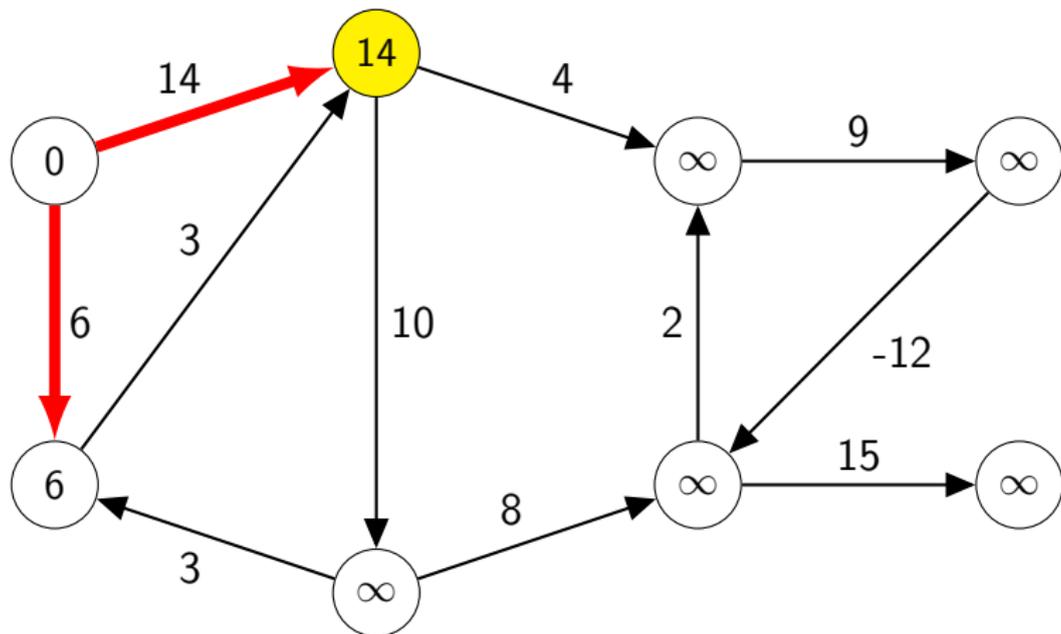
## Bellman-Ford – Beispiel

 $prev[v] = s$ 

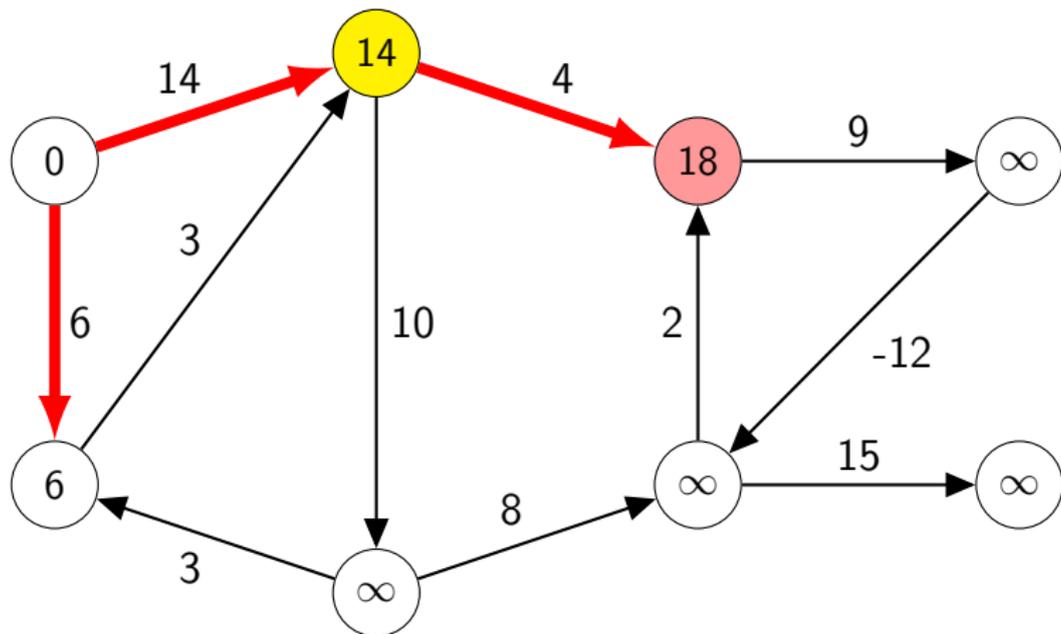
# Bellman-Ford – Beispiel



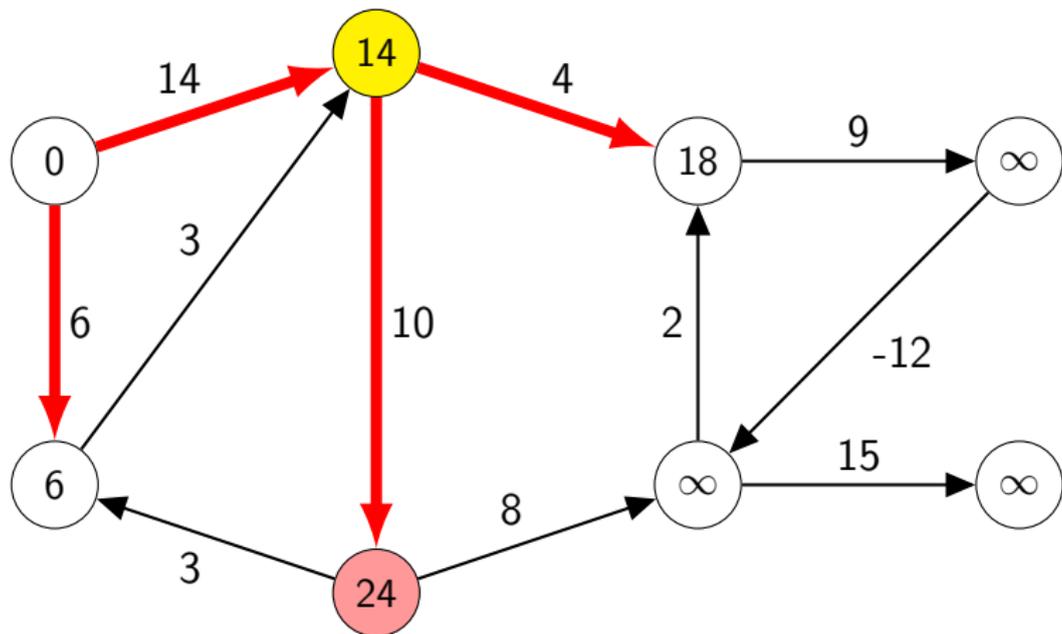
# Bellman-Ford – Beispiel



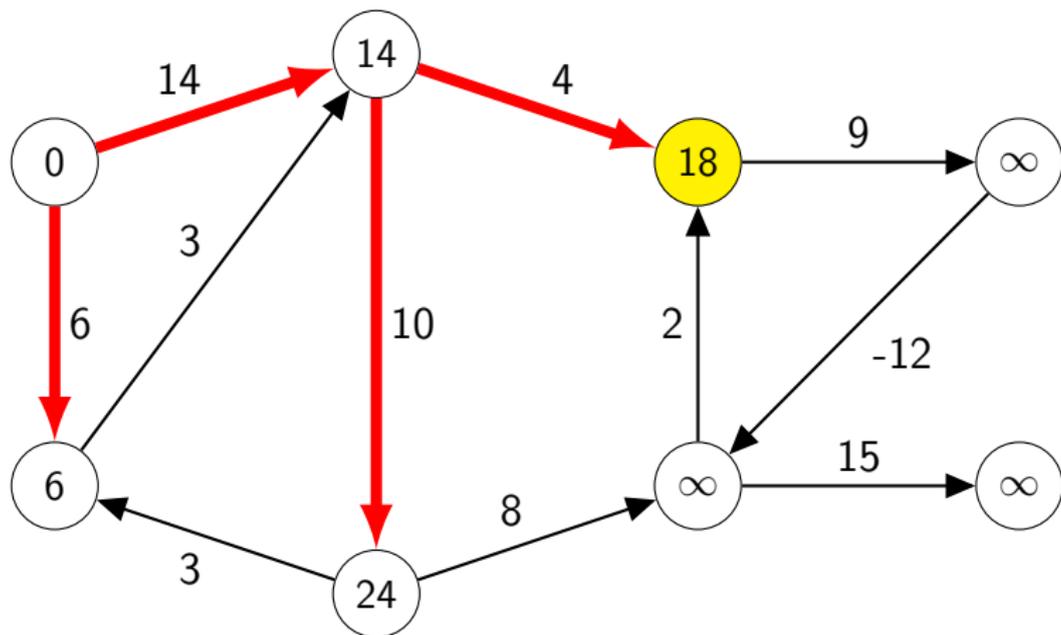
# Bellman-Ford – Beispiel



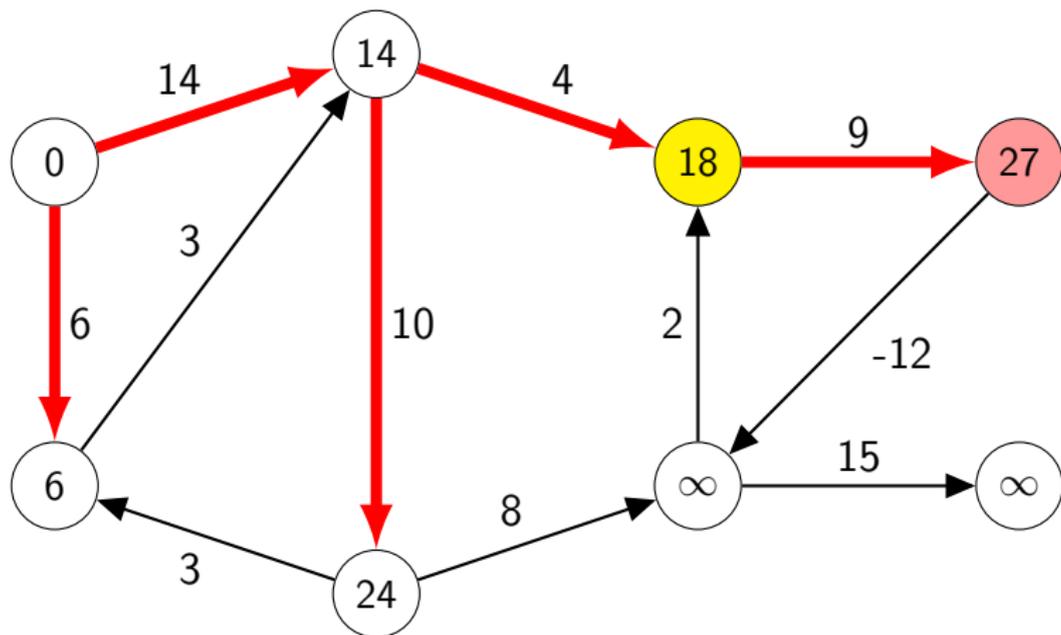
# Bellman-Ford – Beispiel



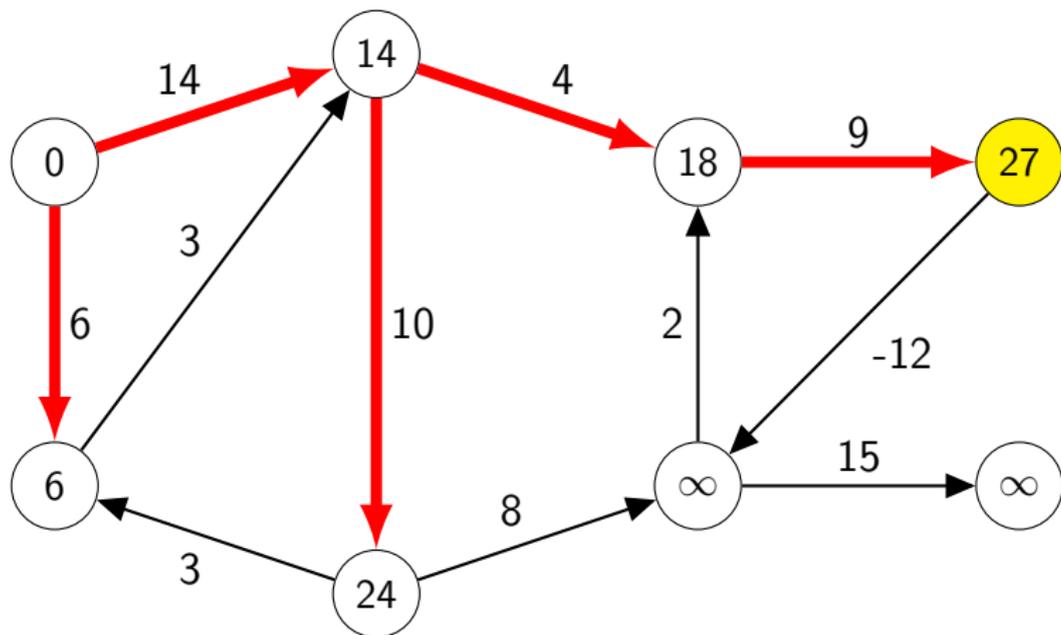
# Bellman-Ford – Beispiel



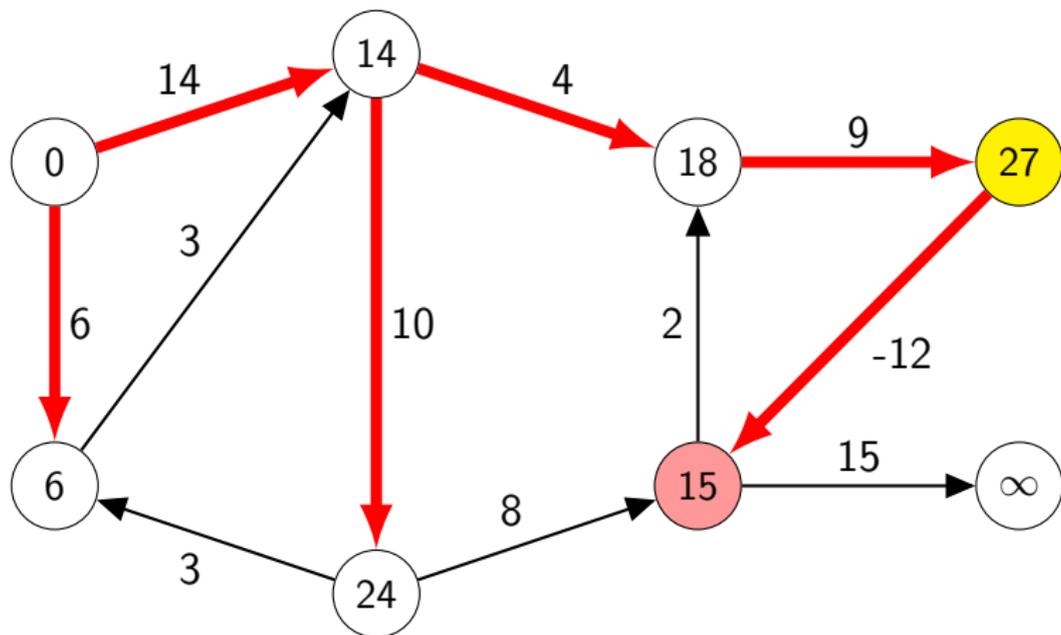
# Bellman-Ford – Beispiel



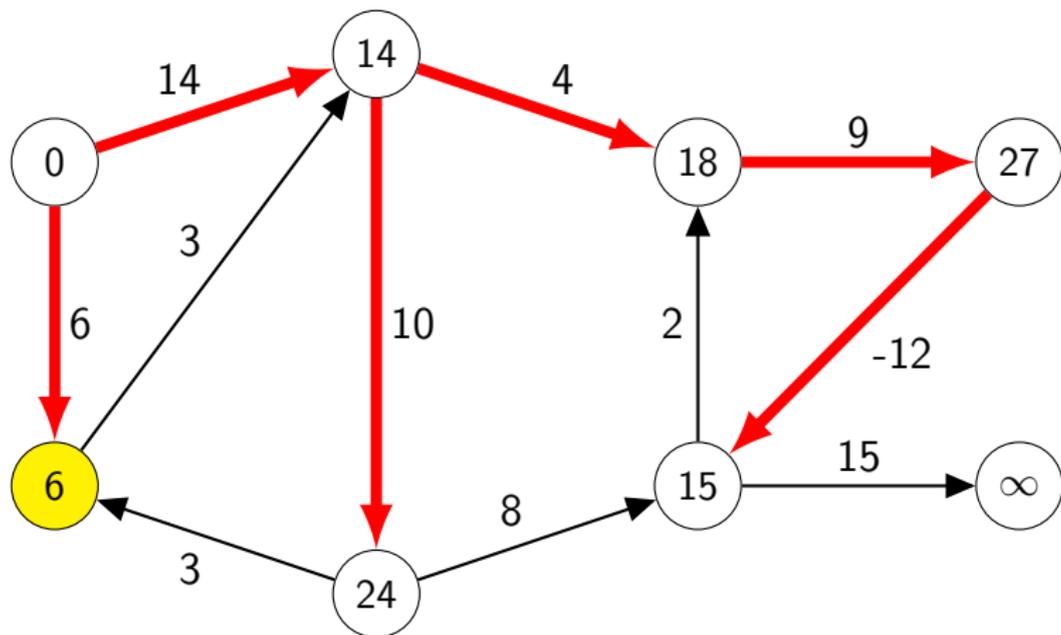
# Bellman-Ford – Beispiel



# Bellman-Ford – Beispiel

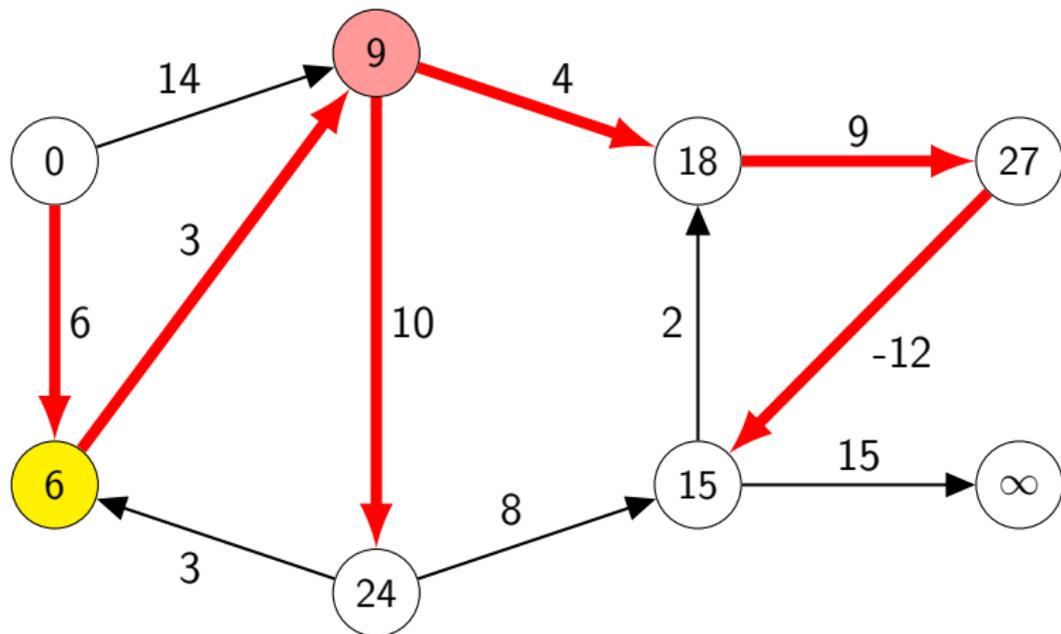


# Bellman-Ford – Beispiel

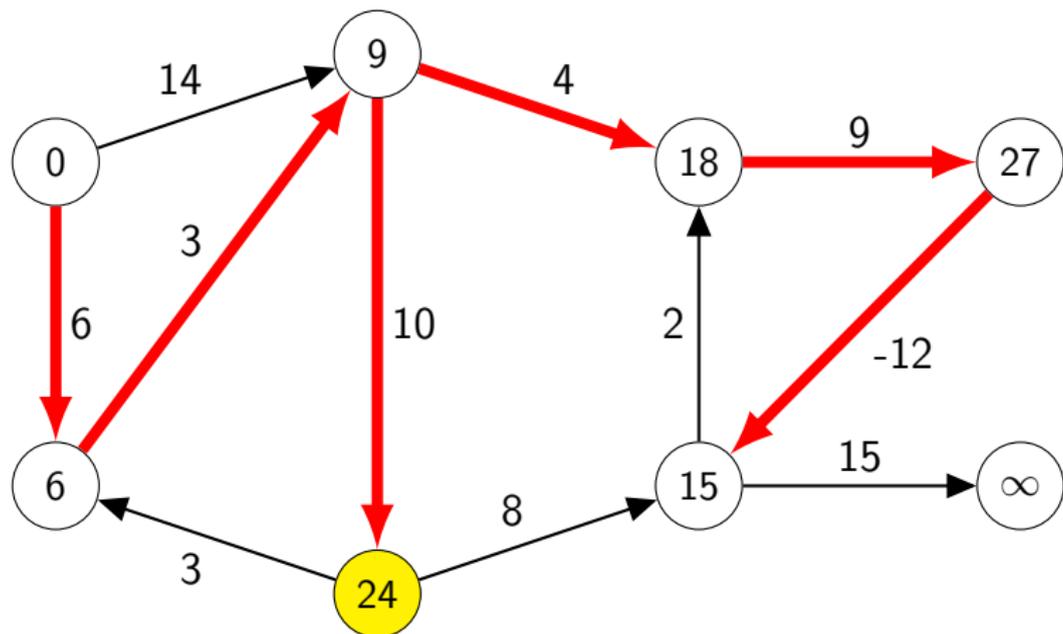


## Bellman-Ford – Beispiel

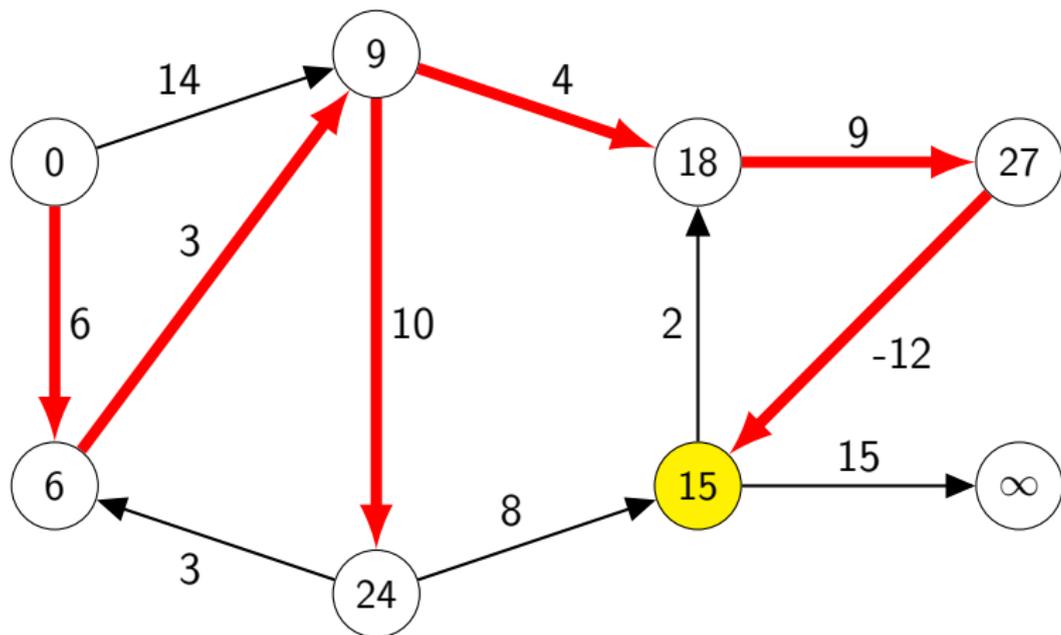
relaxierung



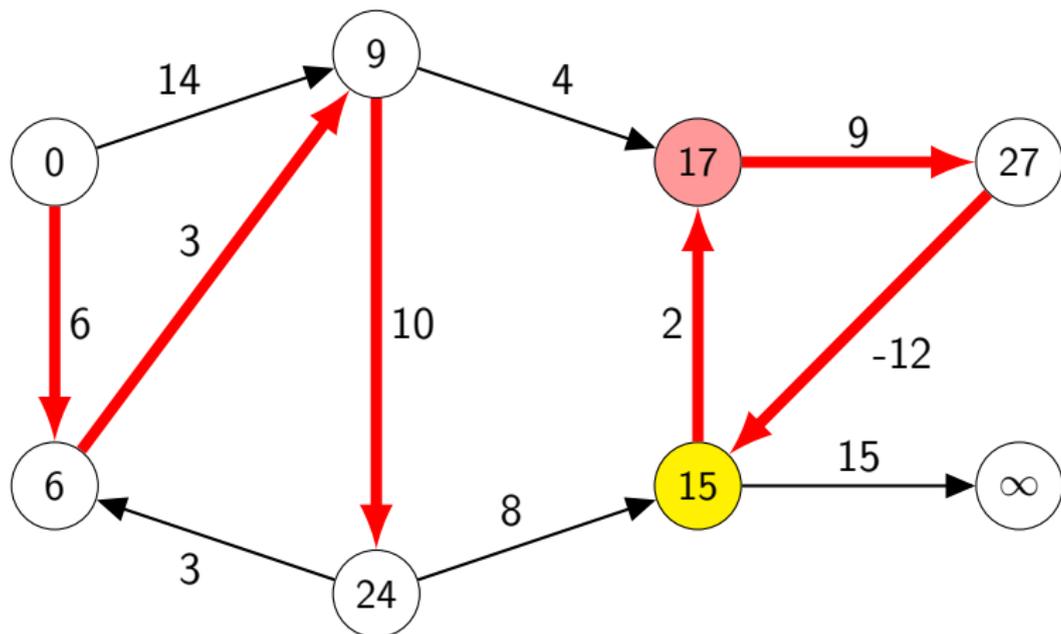
# Bellman-Ford – Beispiel



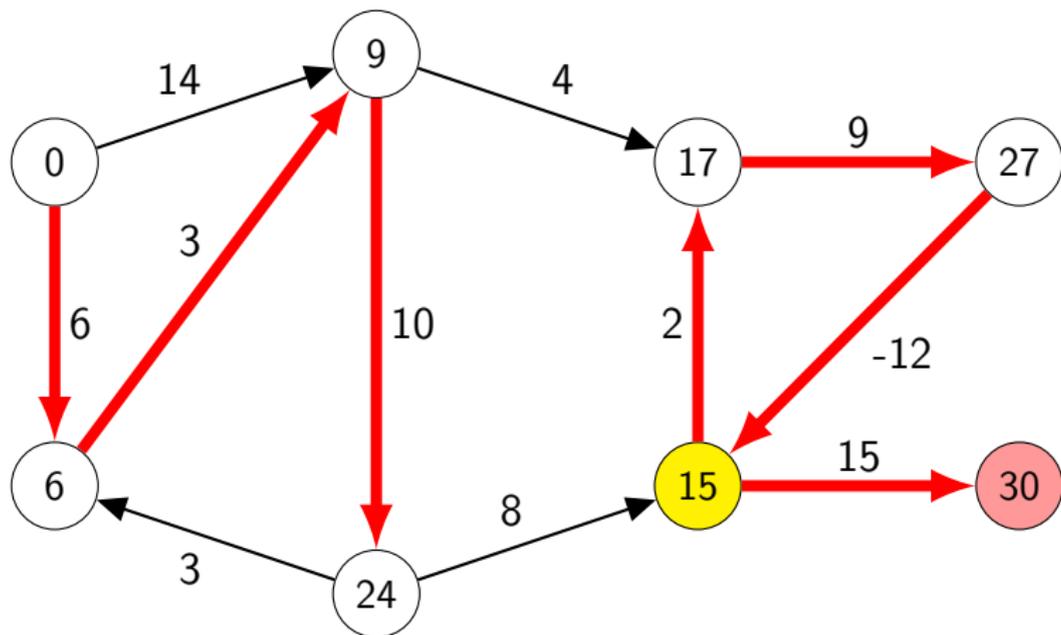
# Bellman-Ford – Beispiel



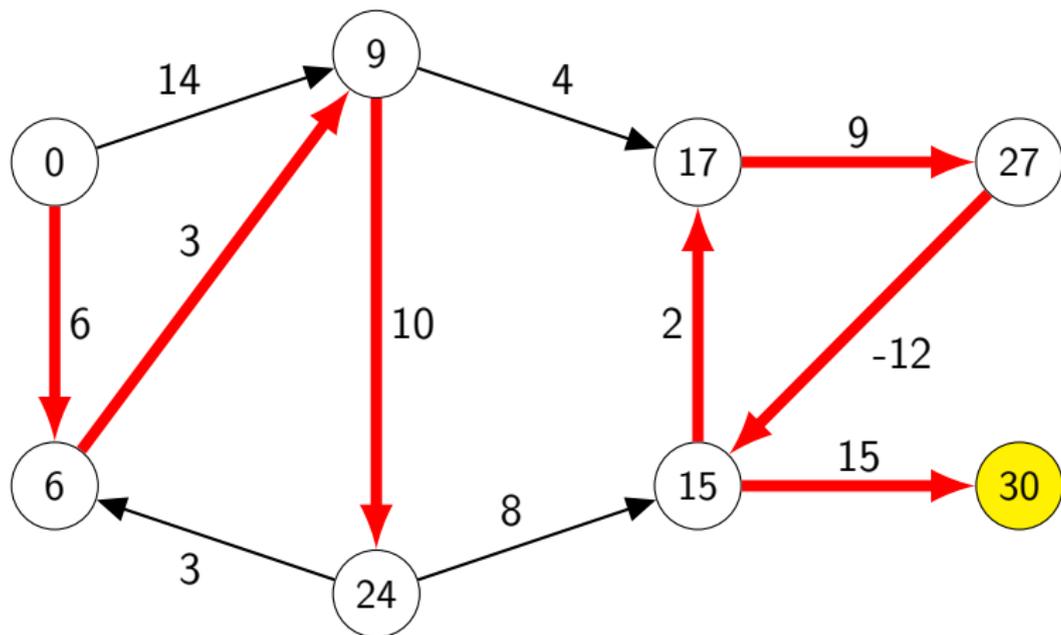
# Bellman-Ford – Beispiel



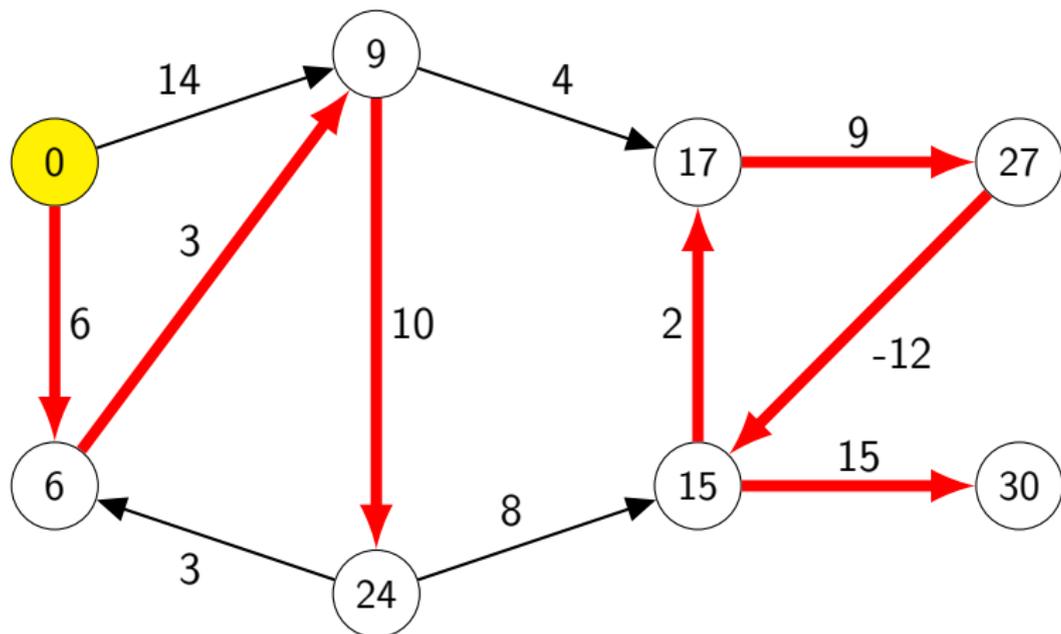
# Bellman-Ford – Beispiel



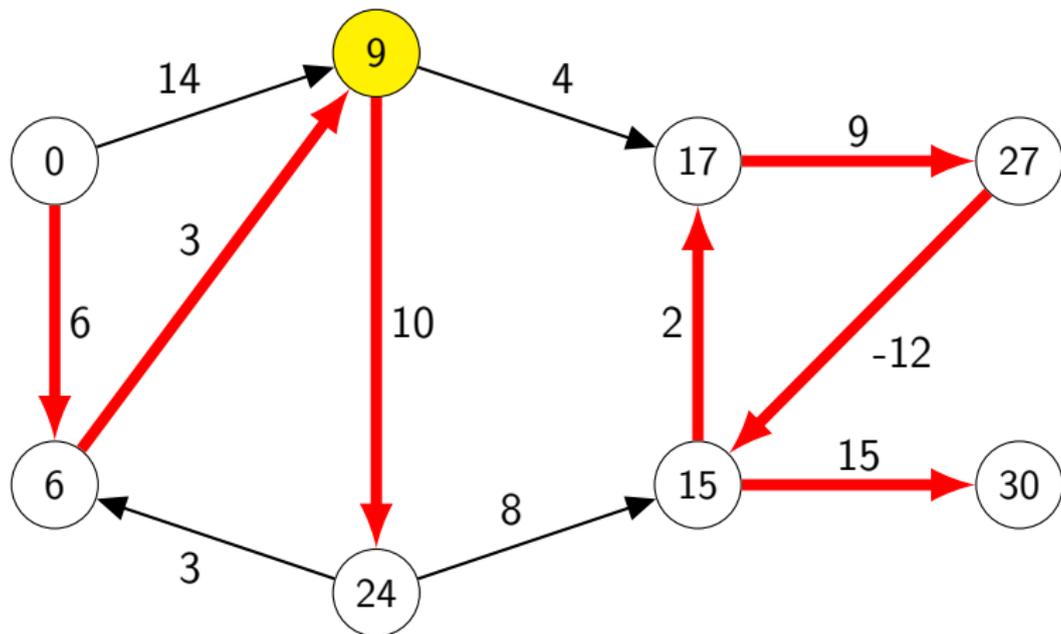
# Bellman-Ford – Beispiel



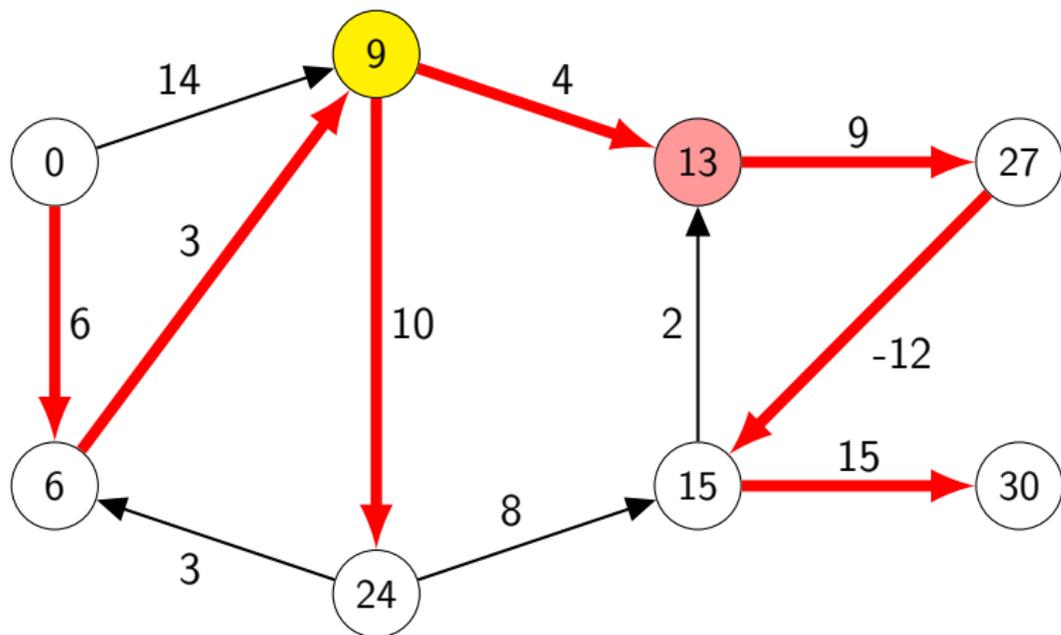
# Bellman-Ford – Beispiel



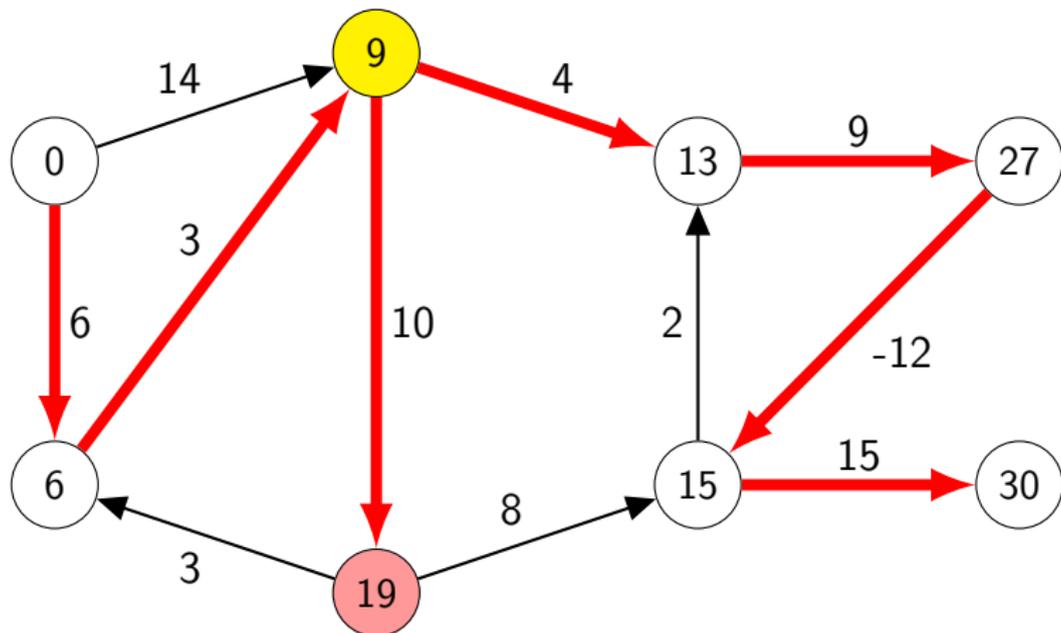
# Bellman-Ford – Beispiel



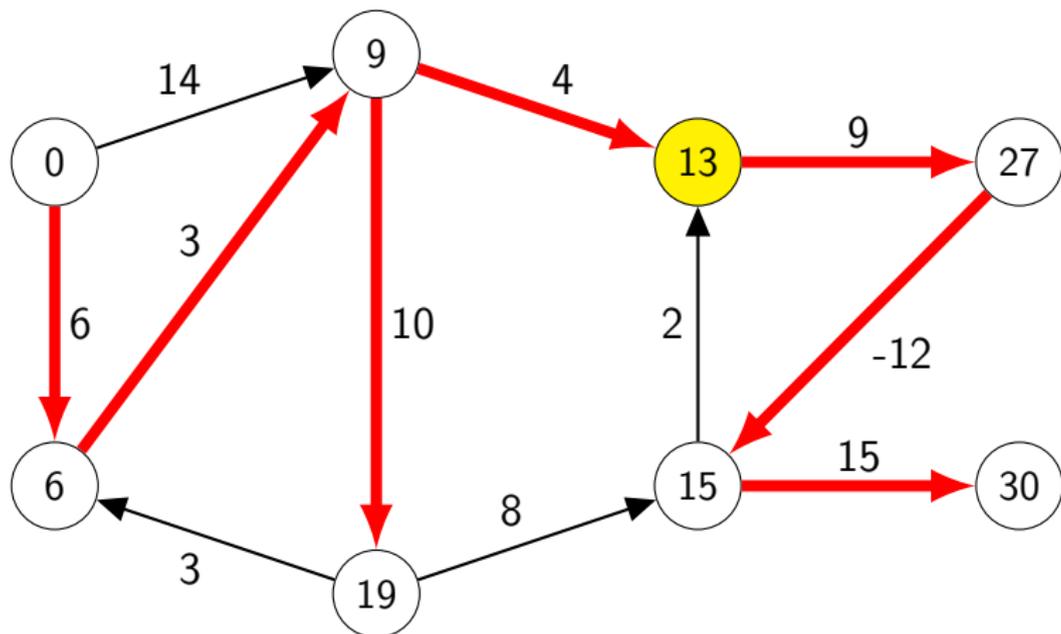
# Bellman-Ford – Beispiel



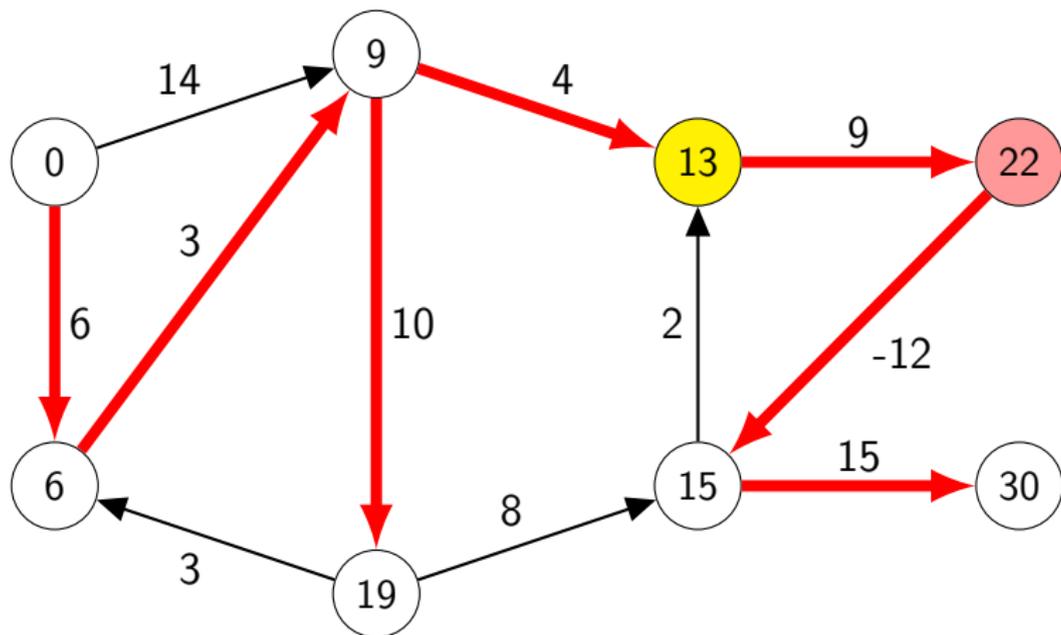
# Bellman-Ford – Beispiel



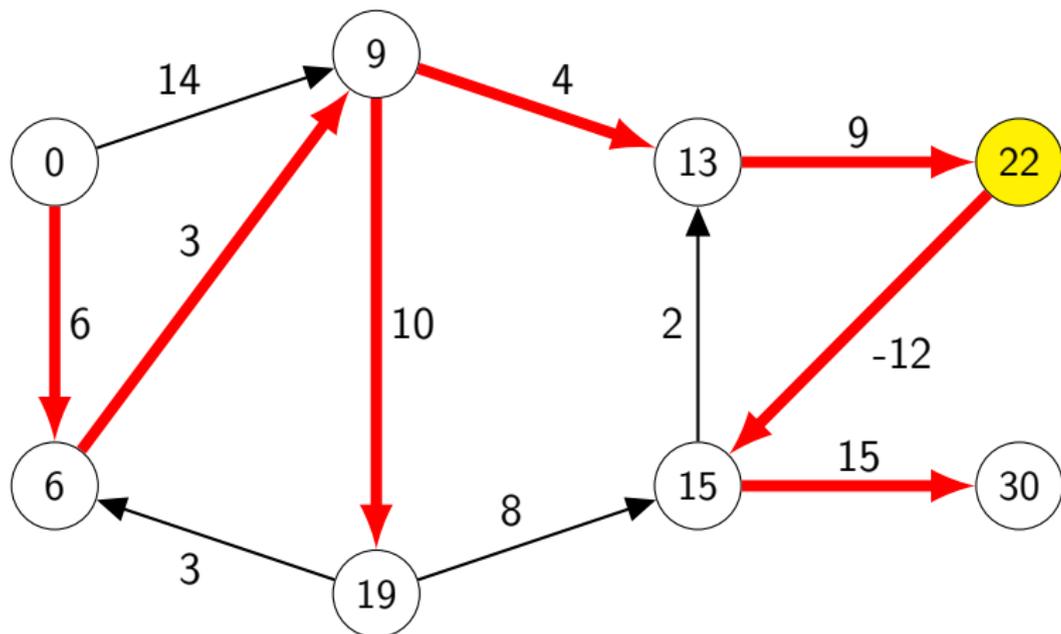
# Bellman-Ford – Beispiel



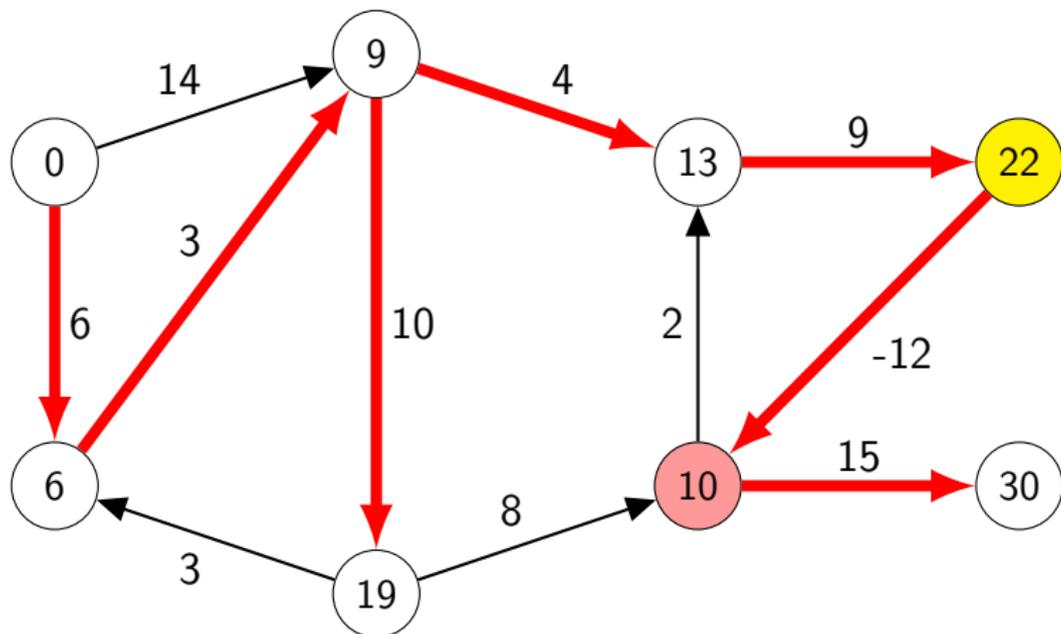
# Bellman-Ford – Beispiel



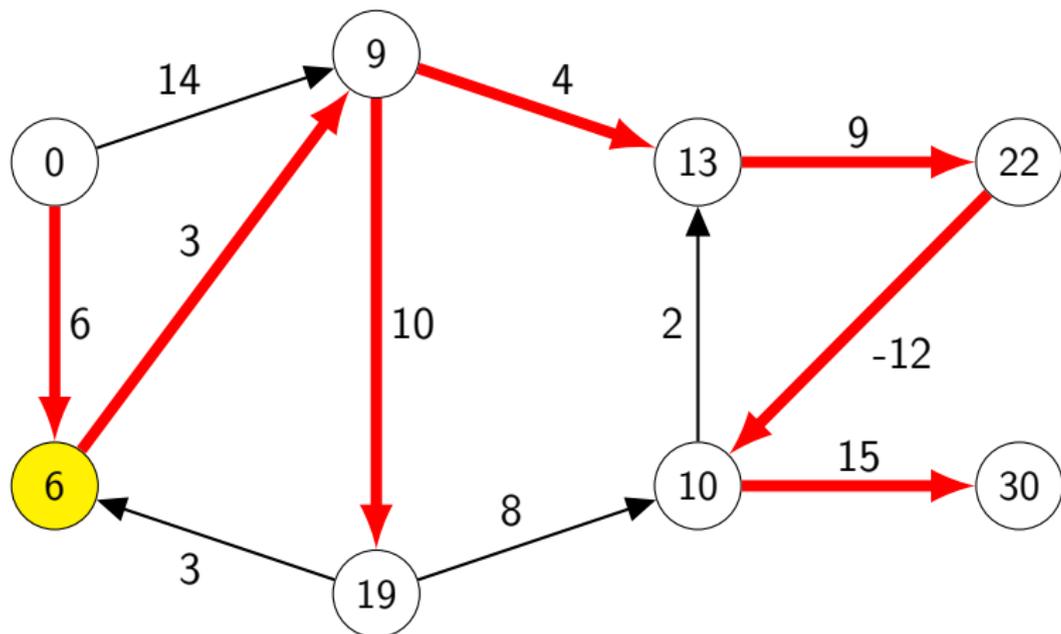
# Bellman-Ford – Beispiel



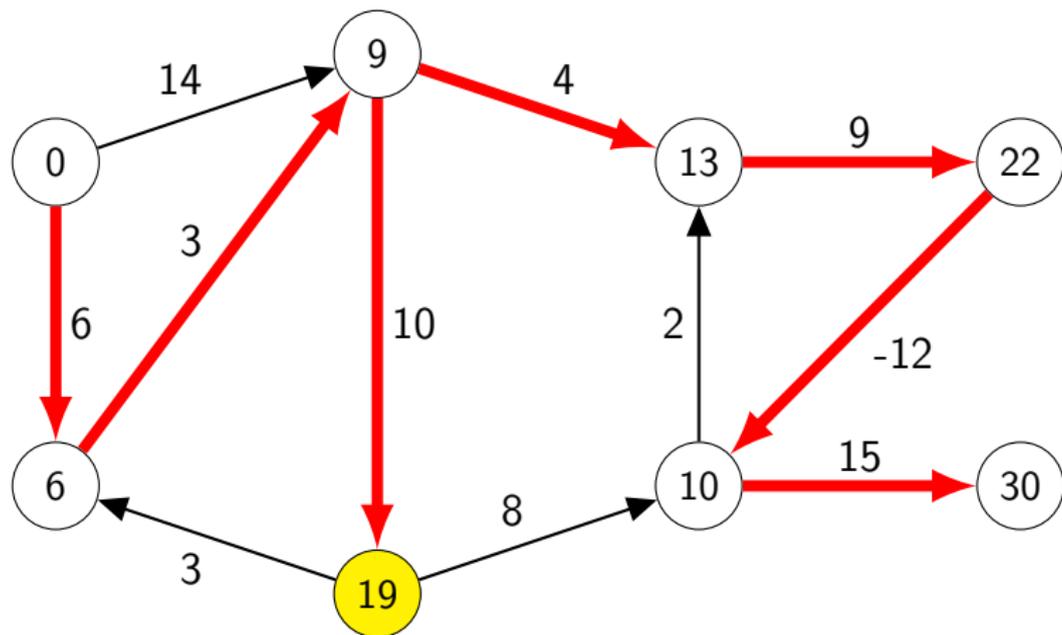
# Bellman-Ford – Beispiel



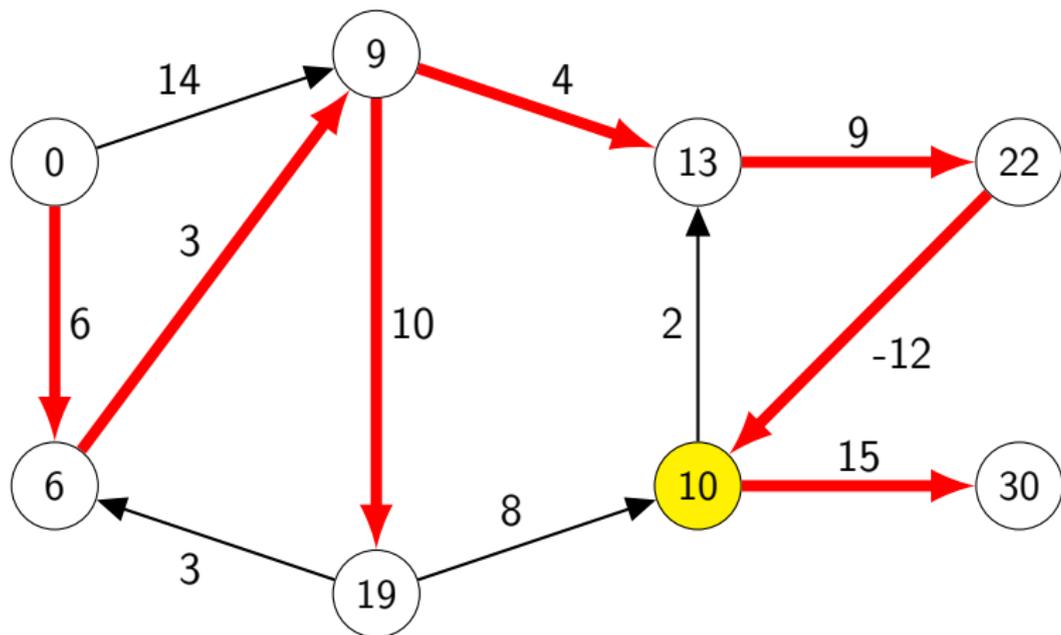
# Bellman-Ford – Beispiel



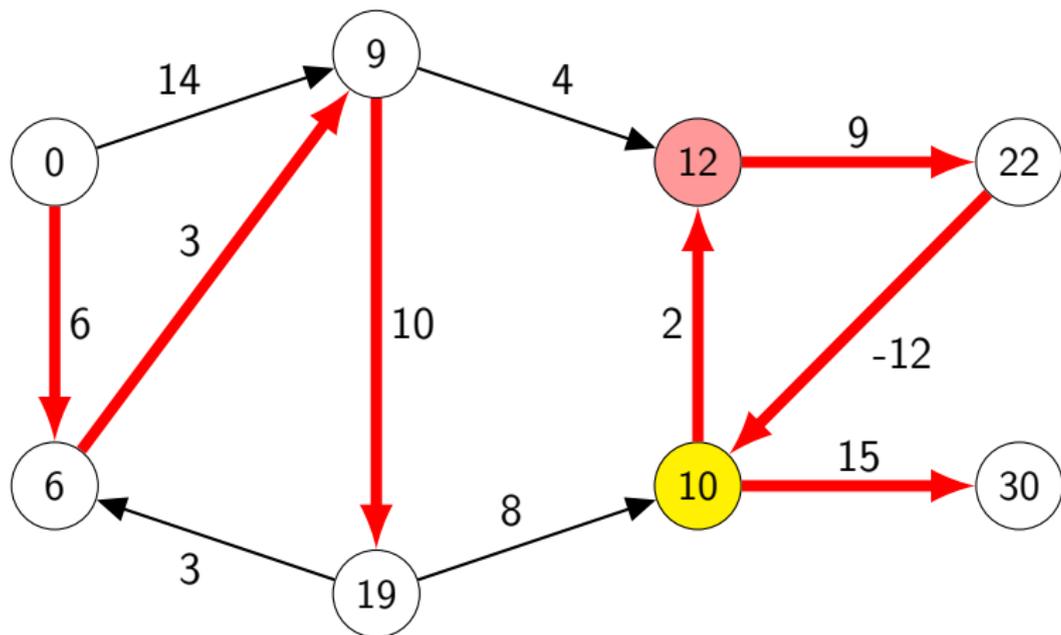
# Bellman-Ford – Beispiel



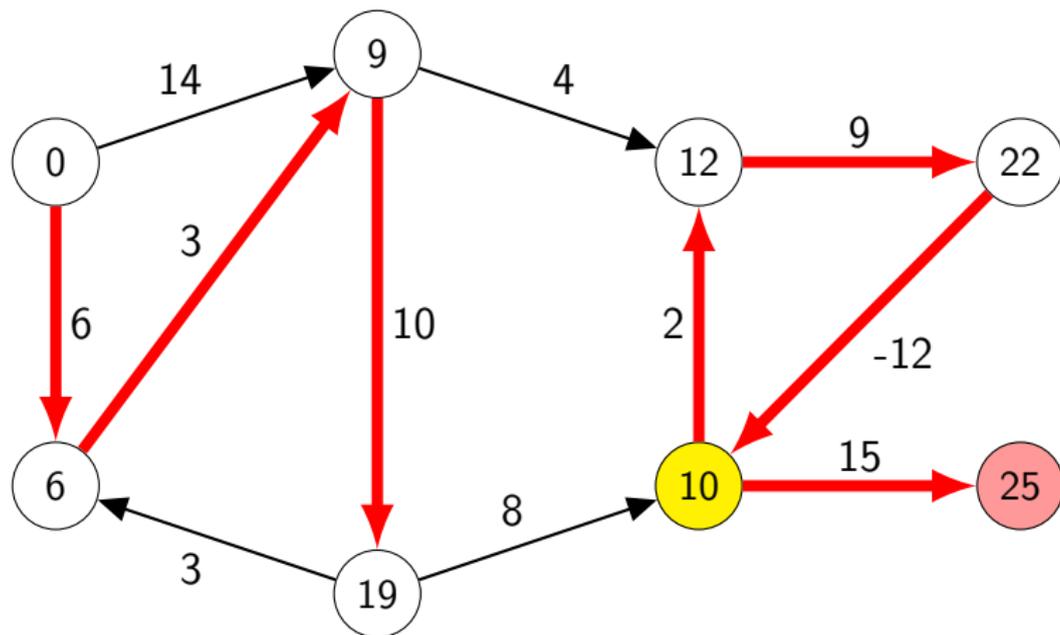
# Bellman-Ford – Beispiel



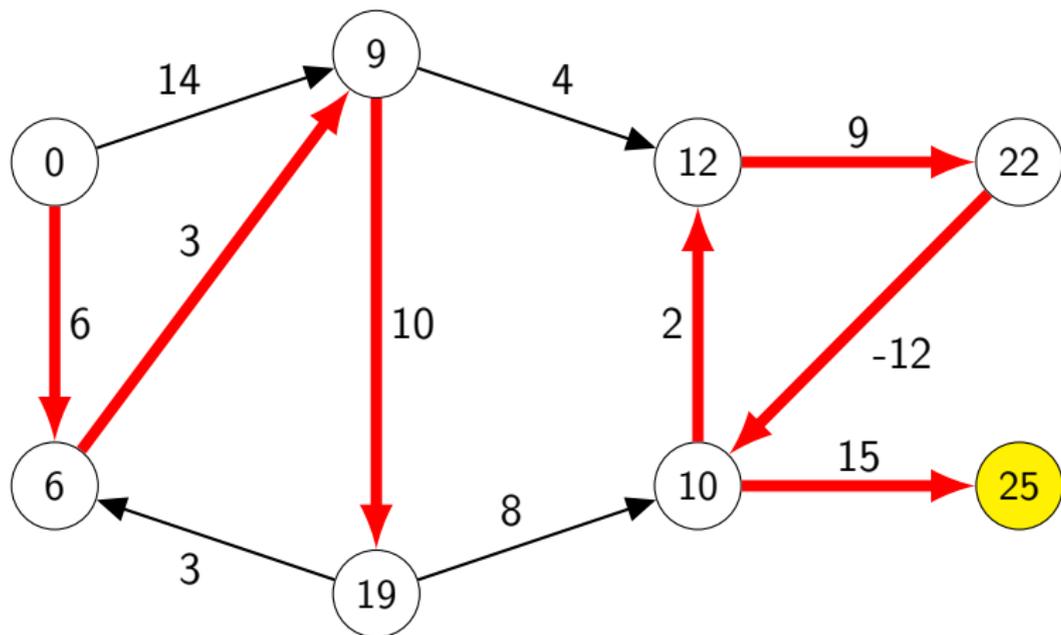
# Bellman-Ford – Beispiel



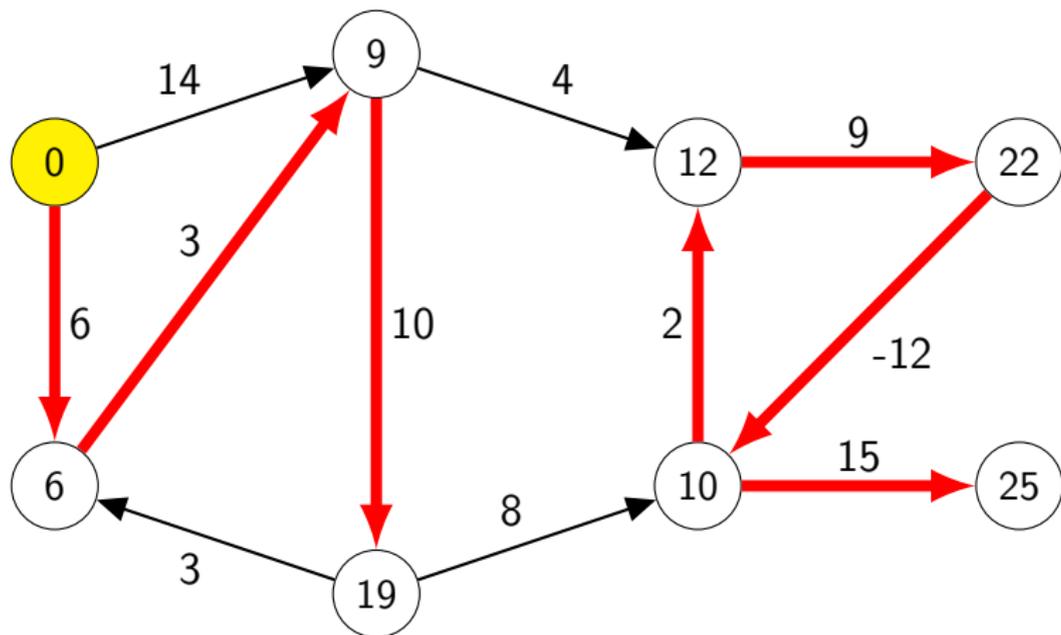
# Bellman-Ford – Beispiel



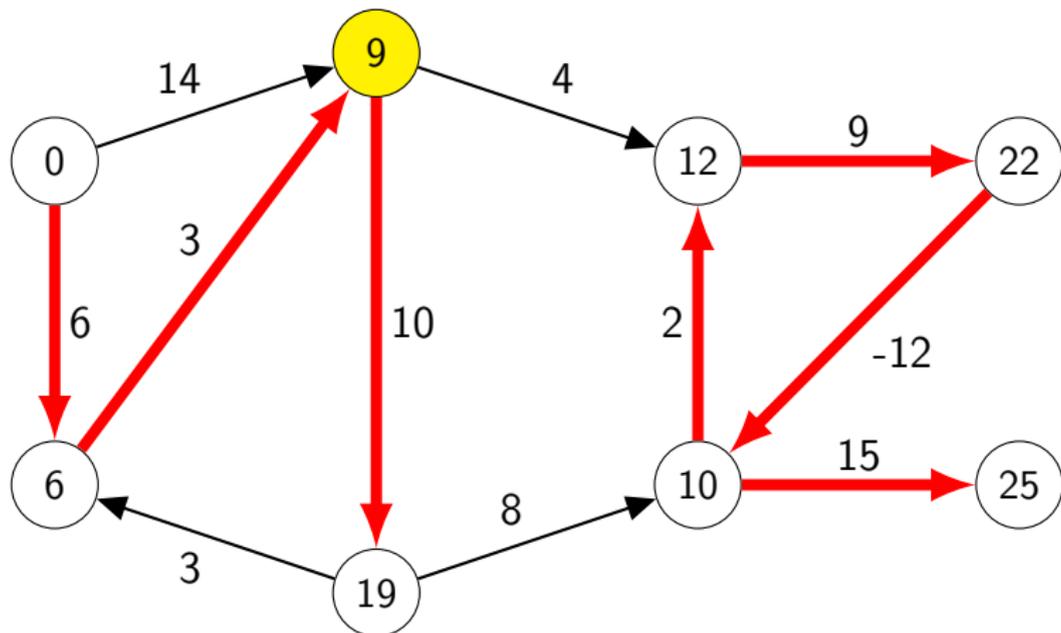
# Bellman-Ford – Beispiel



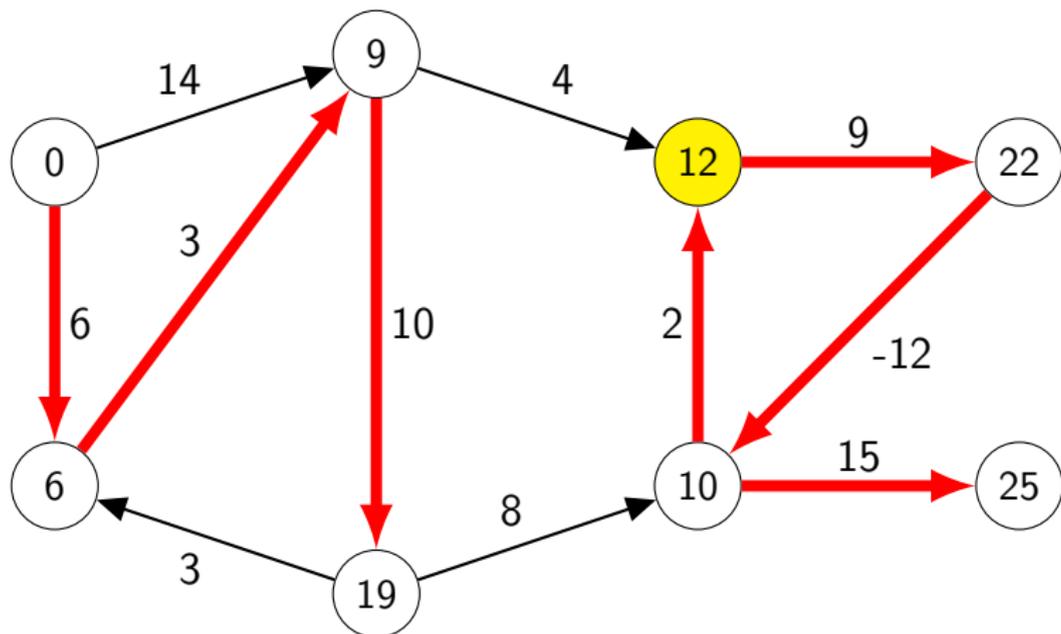
# Bellman-Ford – Beispiel



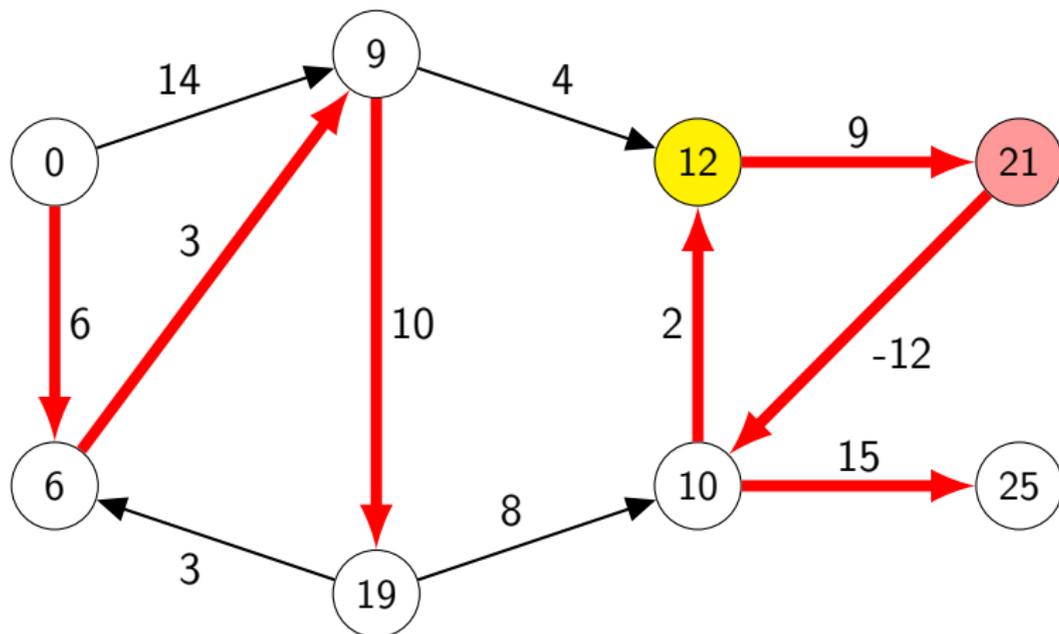
# Bellman-Ford – Beispiel



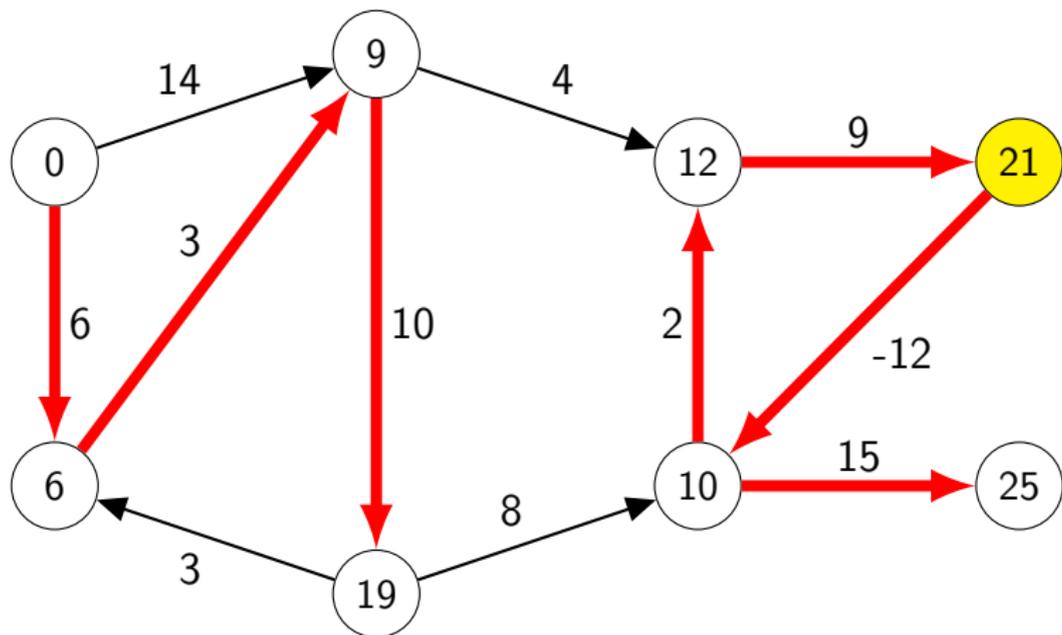
# Bellman-Ford – Beispiel



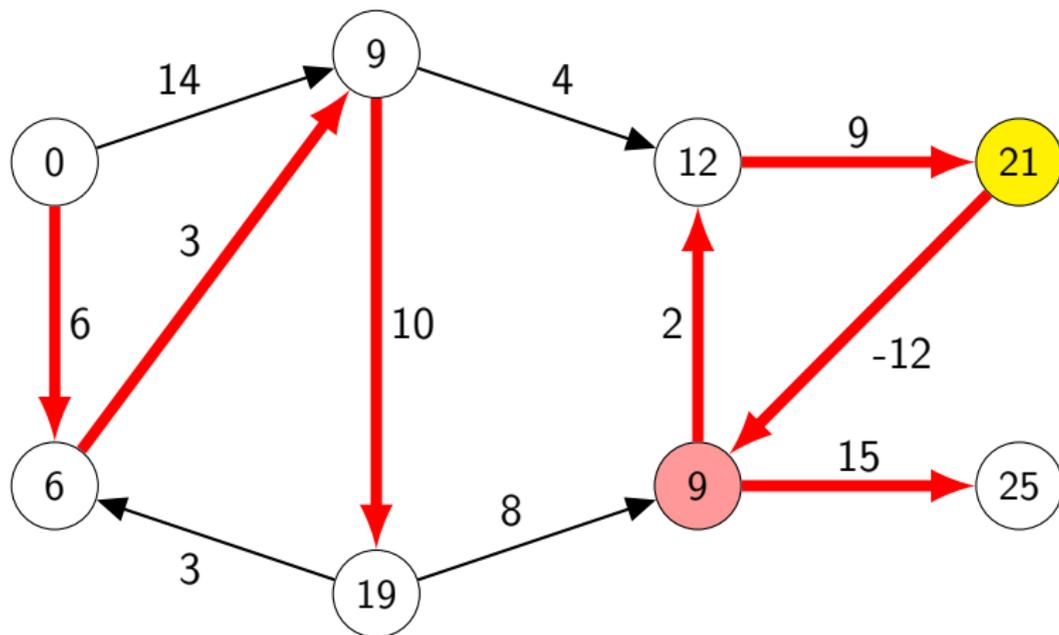
# Bellman-Ford – Beispiel



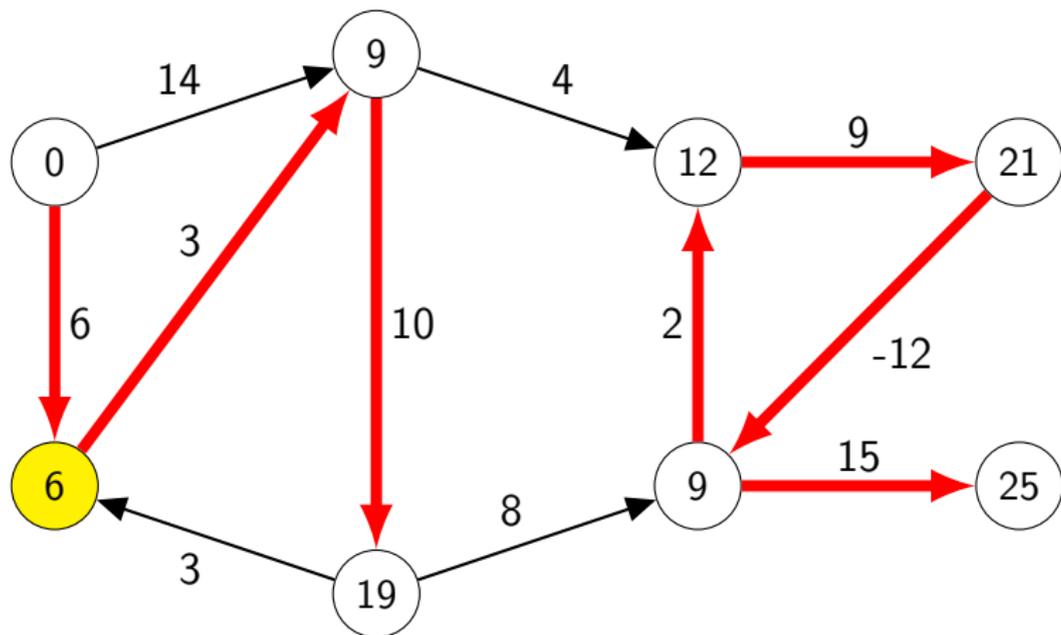
# Bellman-Ford – Beispiel



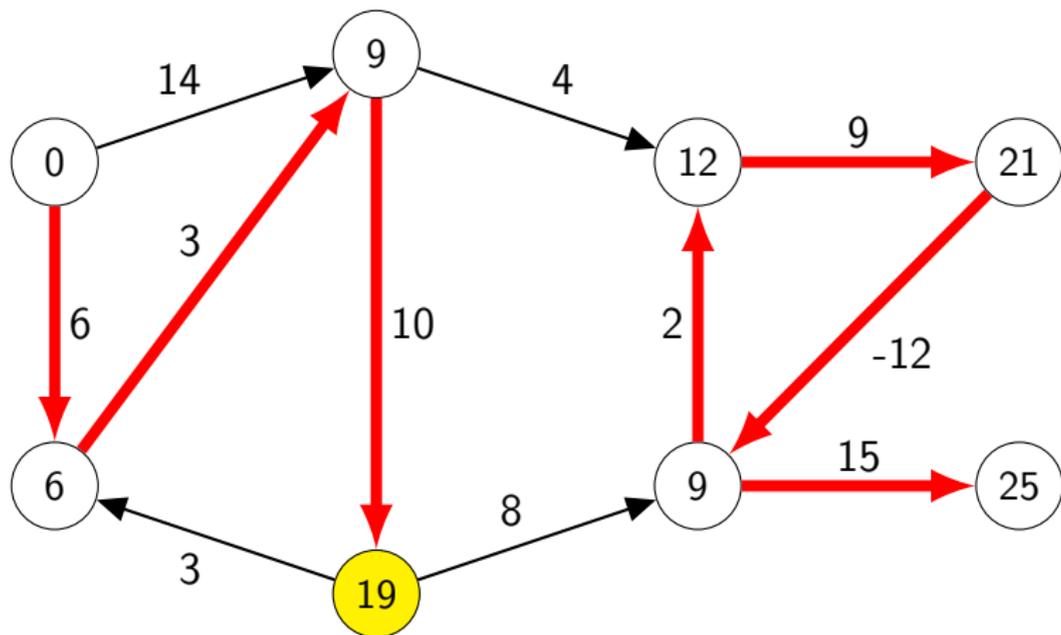
# Bellman-Ford – Beispiel



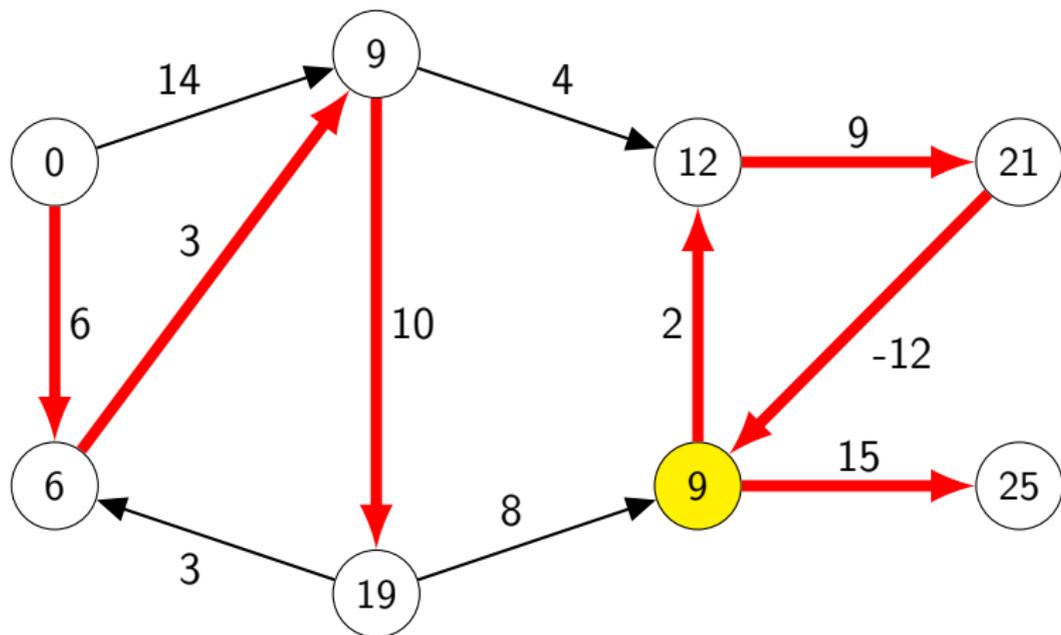
# Bellman-Ford – Beispiel



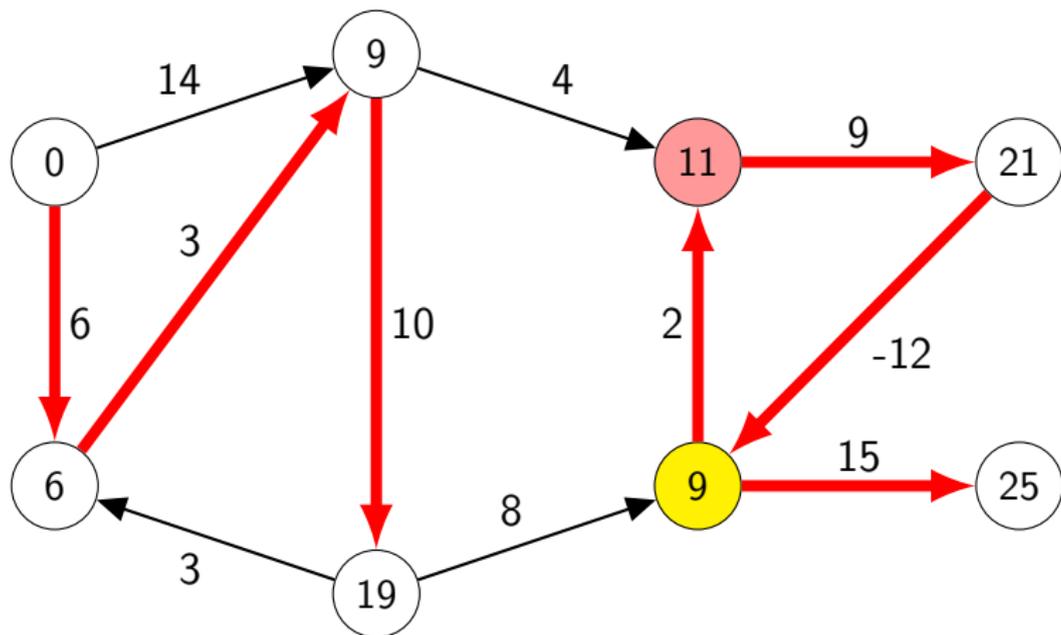
# Bellman-Ford – Beispiel



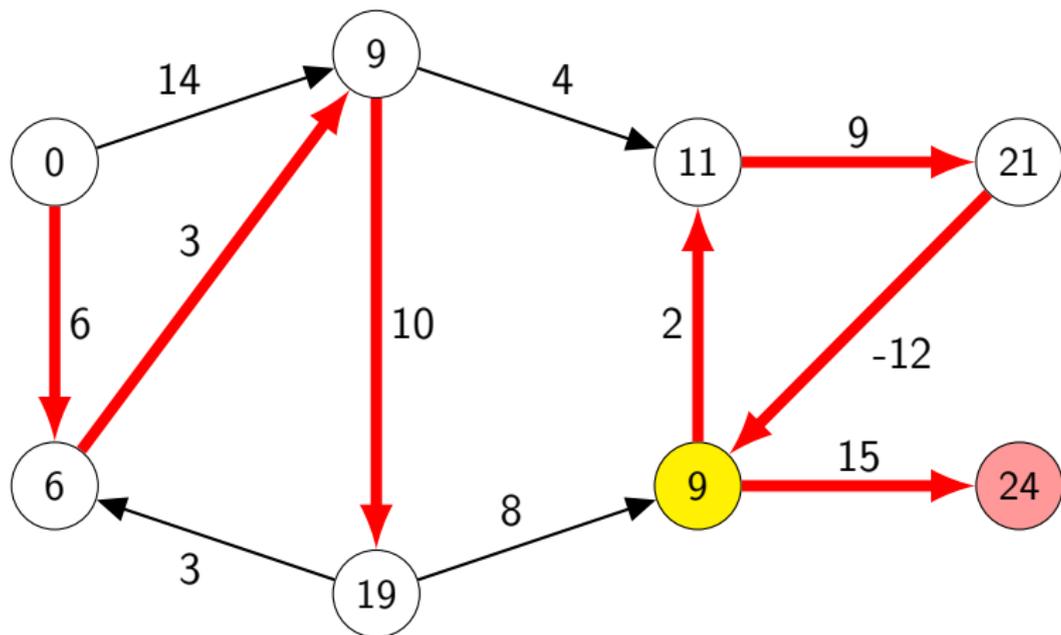
# Bellman-Ford – Beispiel



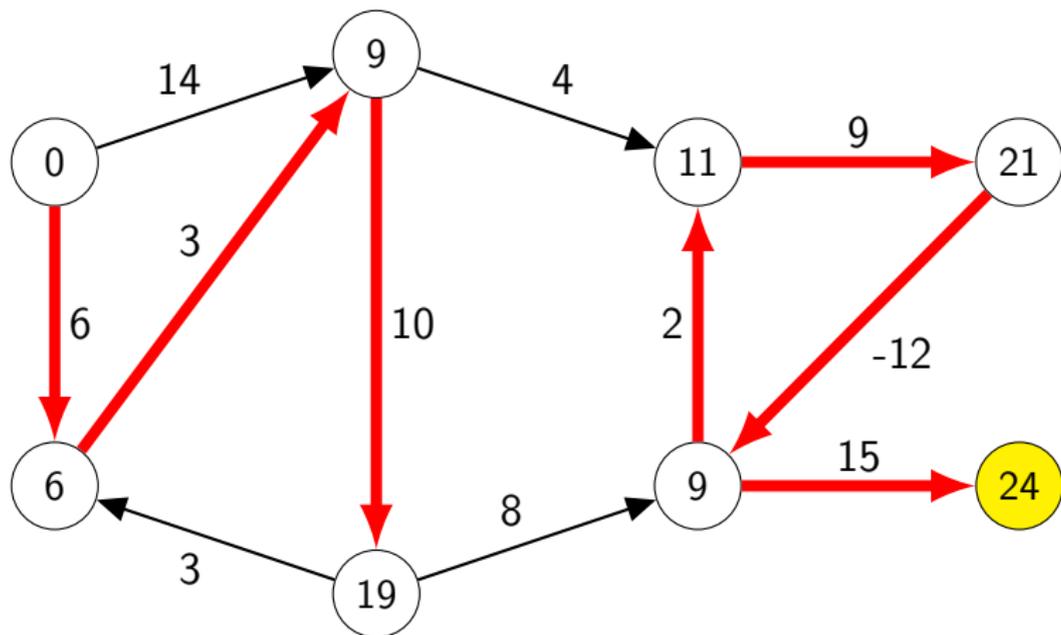
# Bellman-Ford – Beispiel



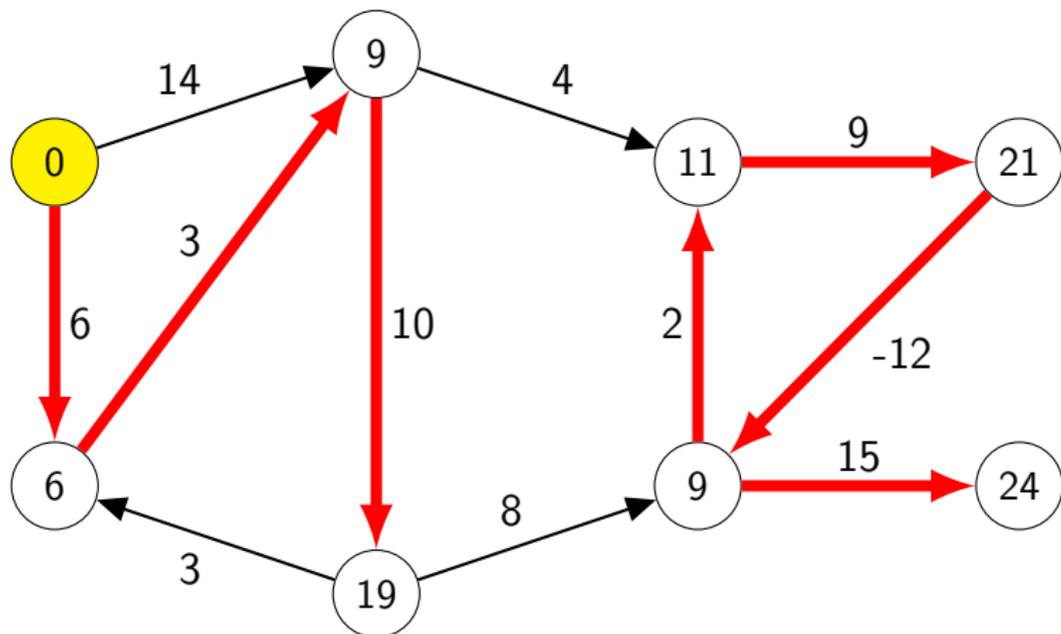
# Bellman-Ford – Beispiel



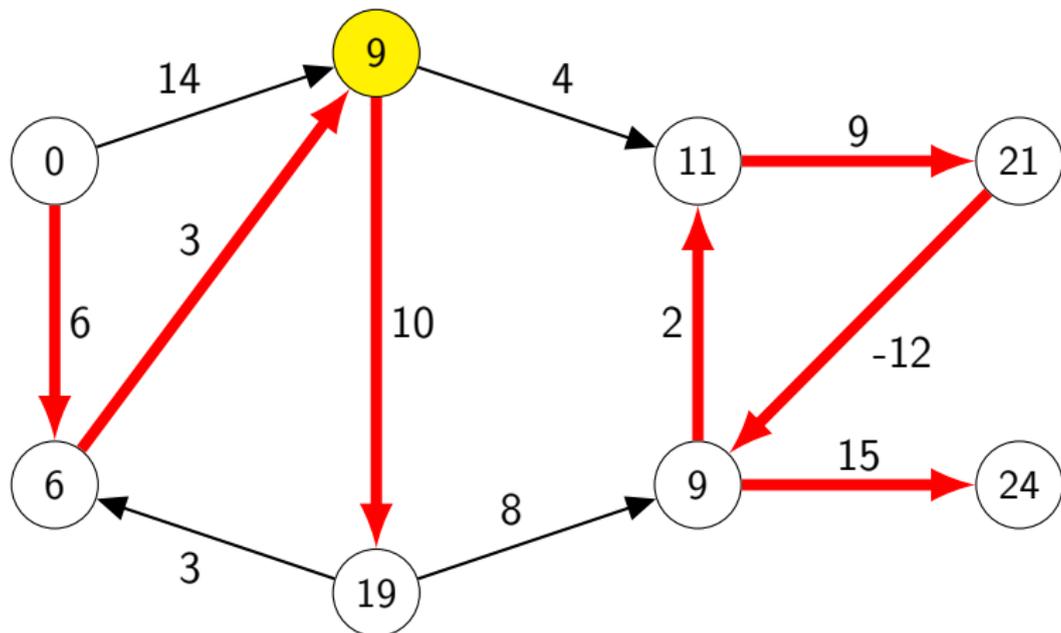
# Bellman-Ford – Beispiel



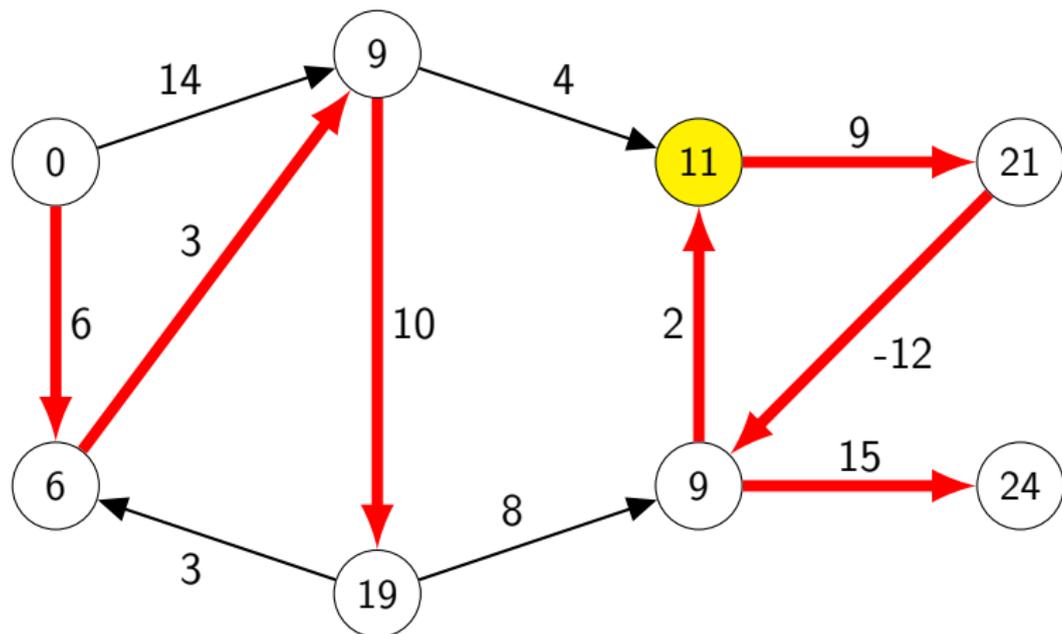
# Bellman-Ford – Beispiel



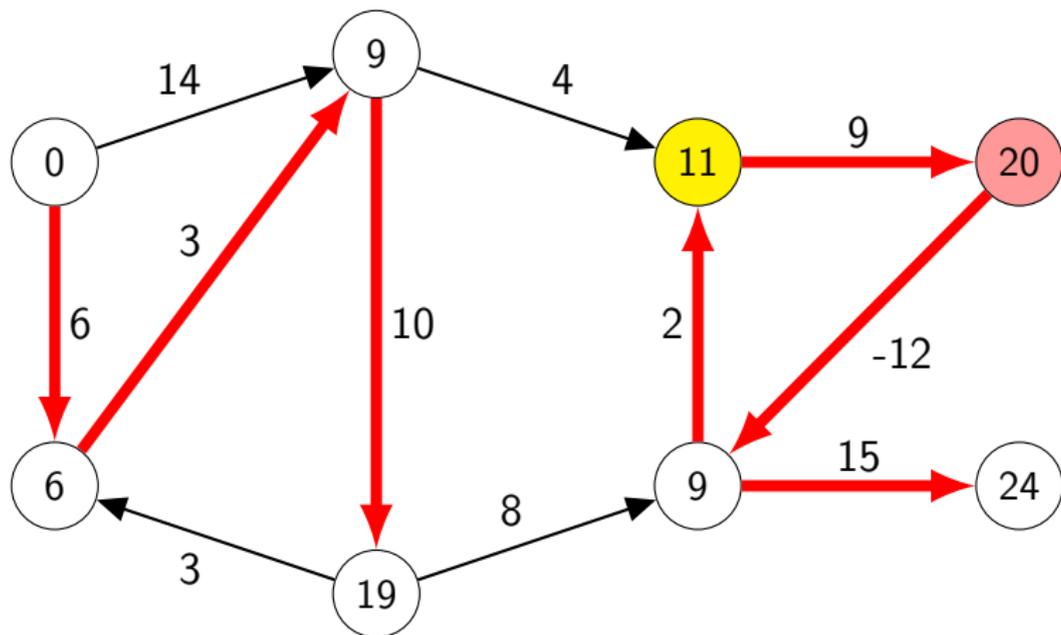
# Bellman-Ford – Beispiel



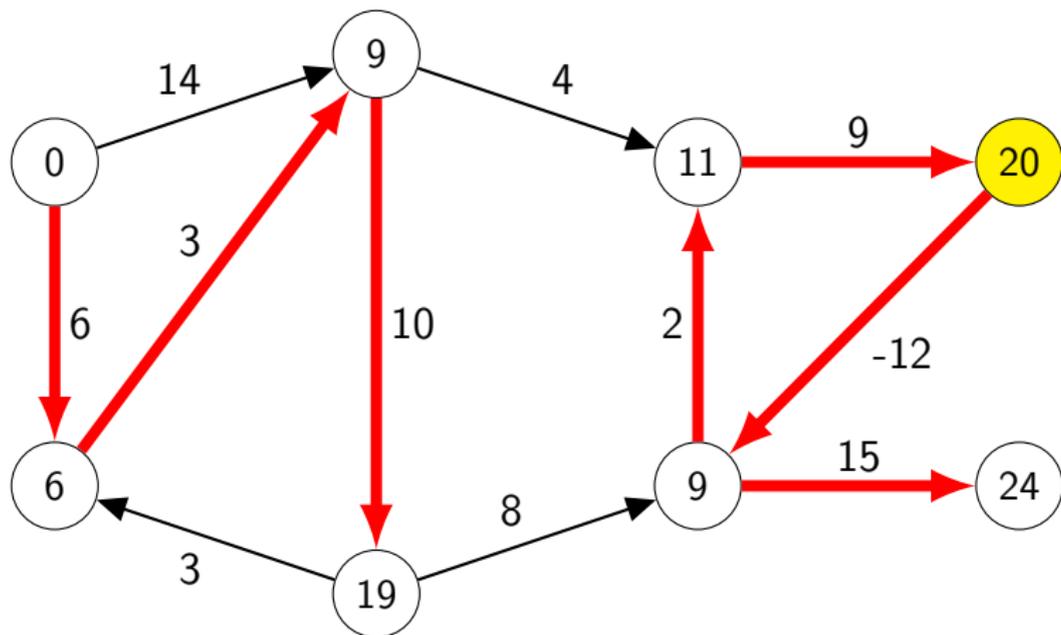
# Bellman-Ford – Beispiel



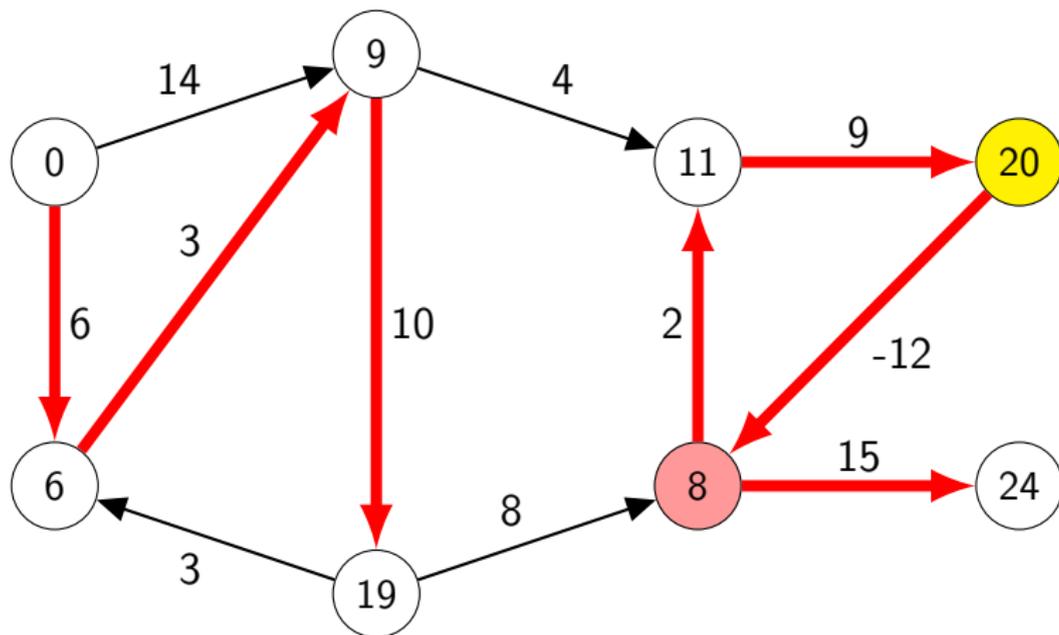
# Bellman-Ford – Beispiel



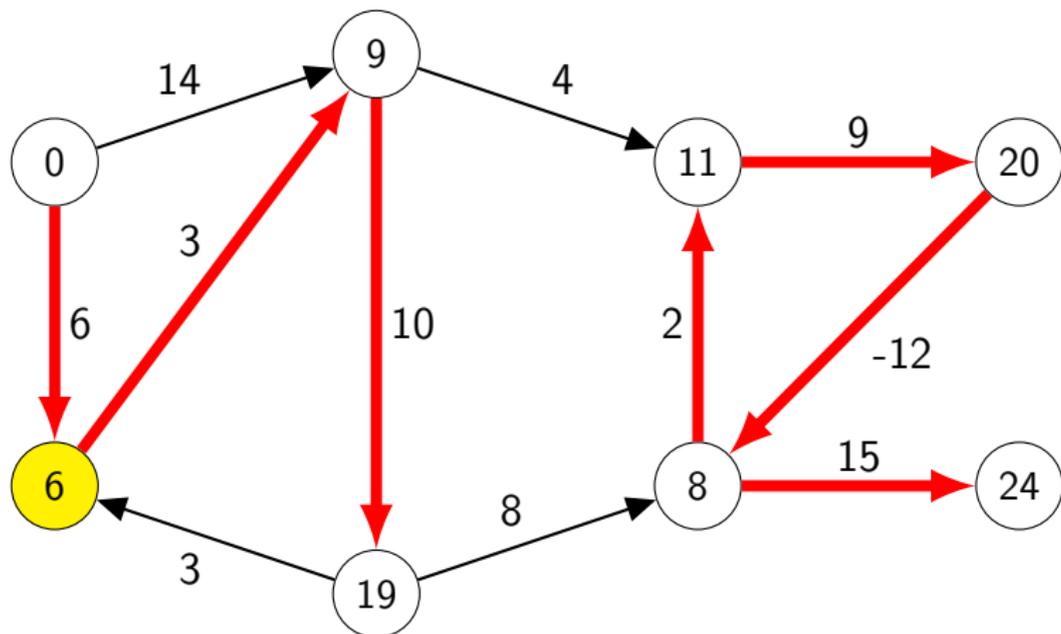
# Bellman-Ford – Beispiel



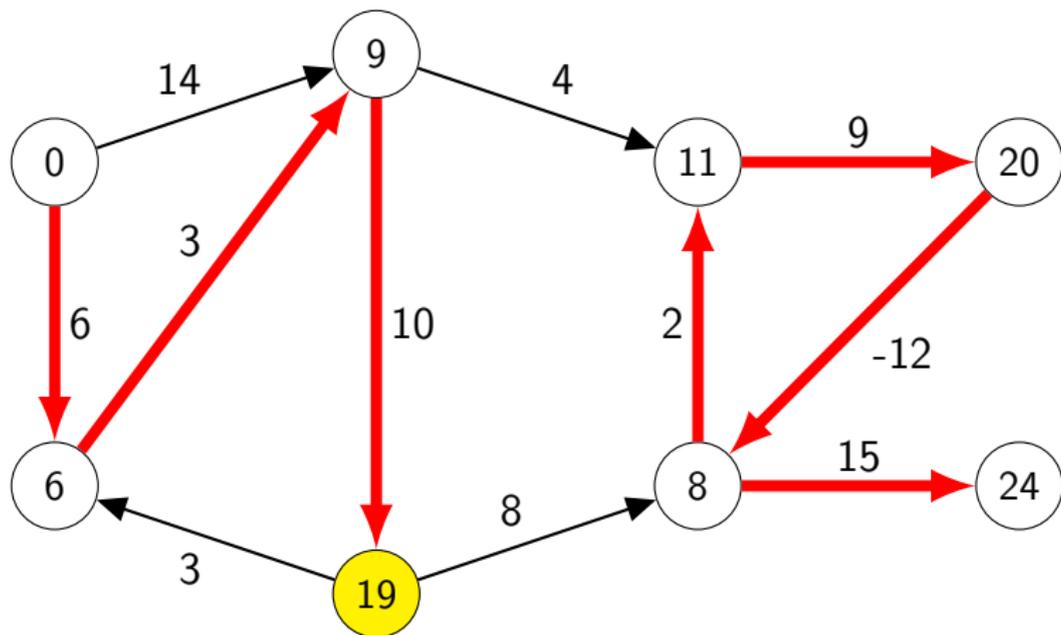
# Bellman-Ford – Beispiel



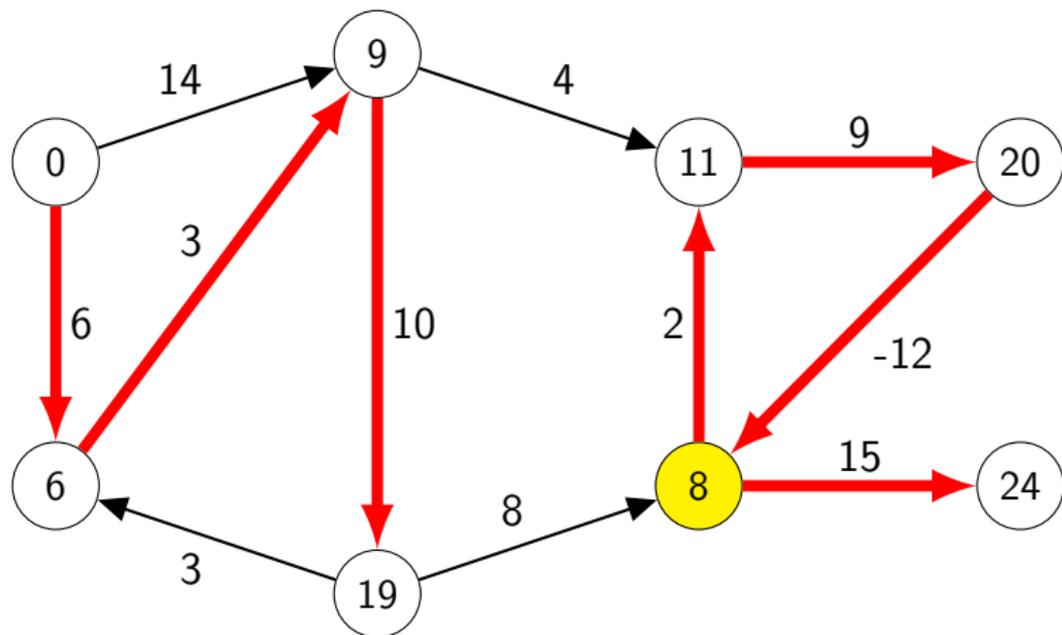
# Bellman-Ford – Beispiel



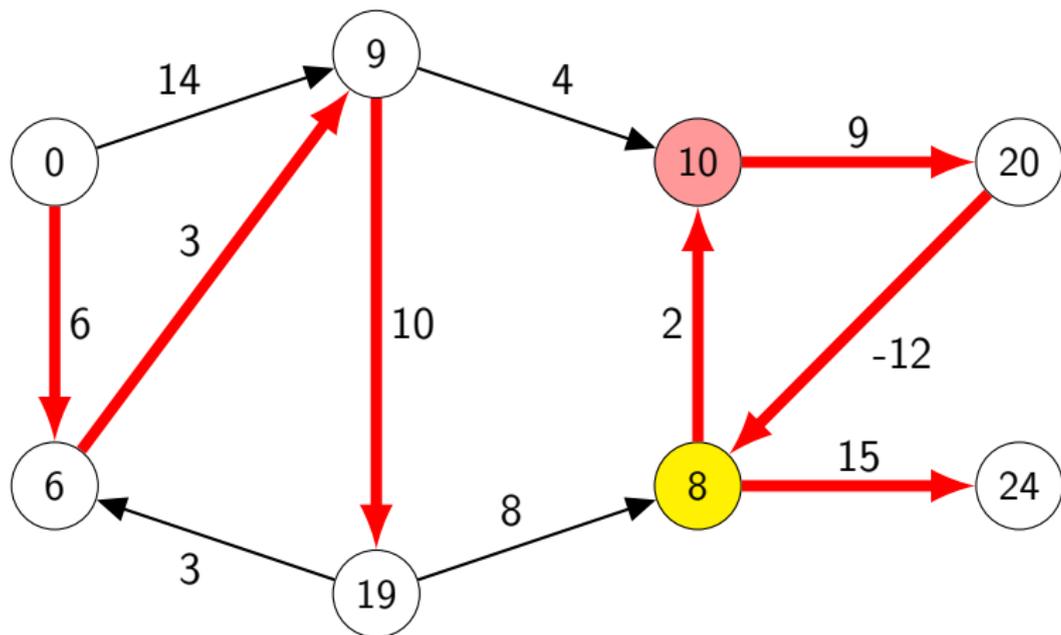
# Bellman-Ford – Beispiel



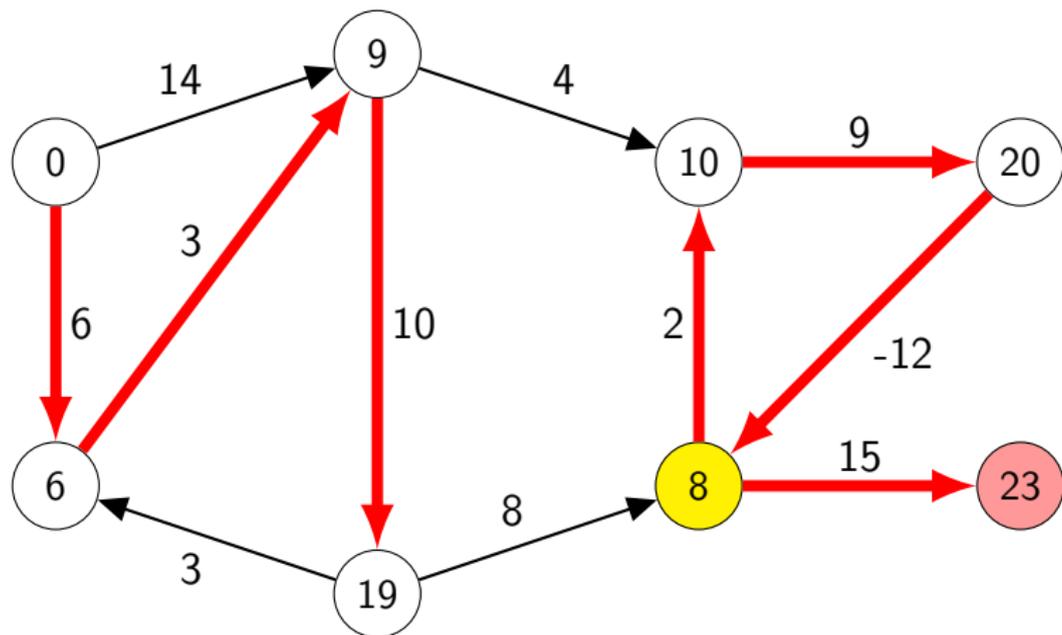
# Bellman-Ford – Beispiel



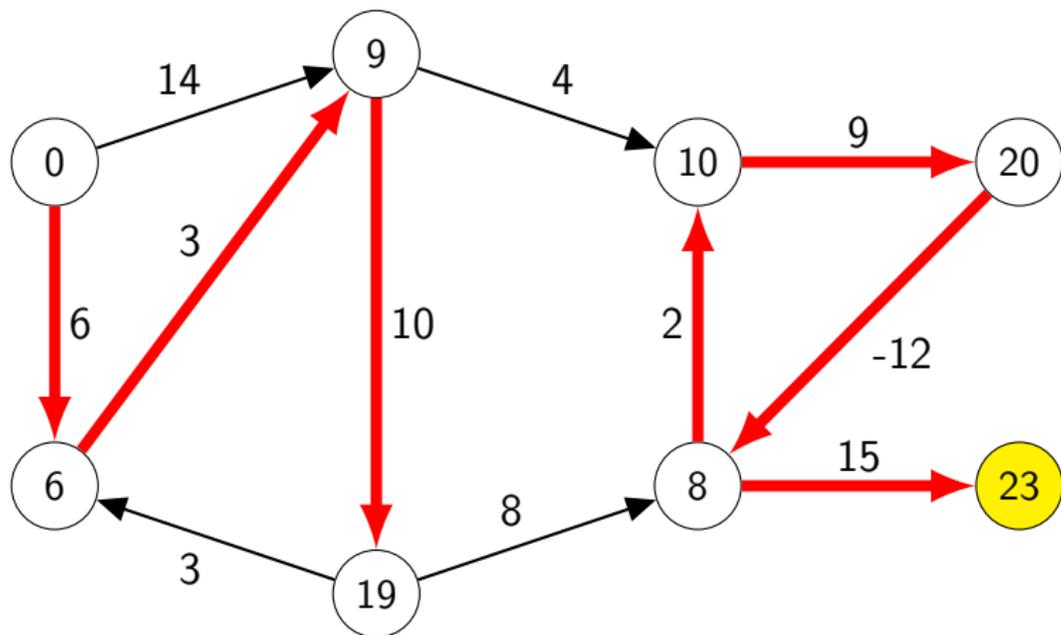
# Bellman-Ford – Beispiel



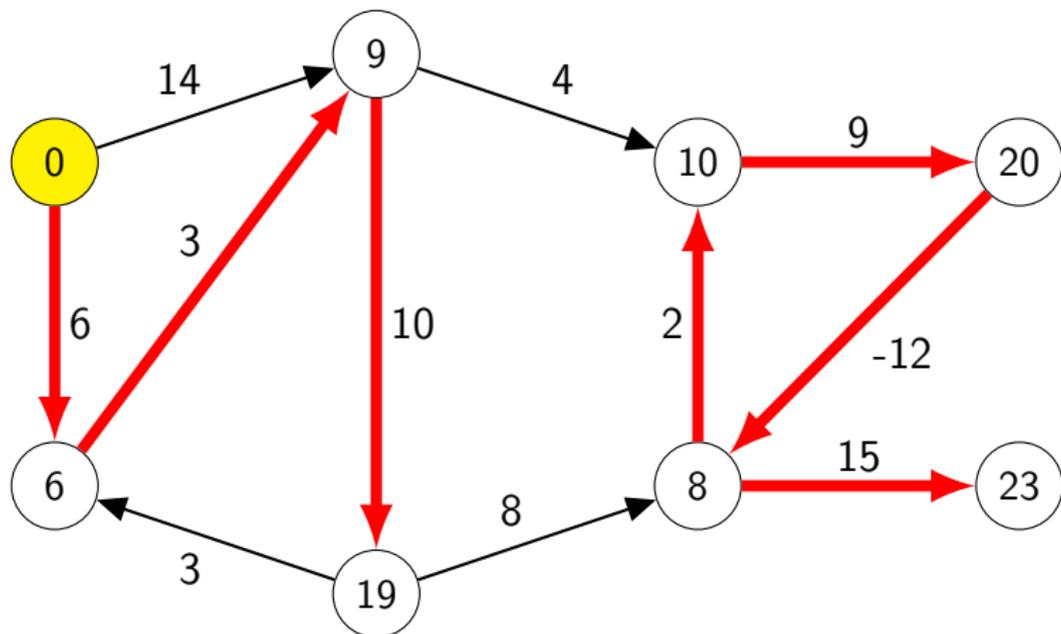
# Bellman-Ford – Beispiel



# Bellman-Ford – Beispiel



# Bellman-Ford – Beispiel



## Theorem (Korrektheit BF Algorithmus)

- a. Falls  $G$  keine Zyklen mit negativem Gewicht erreichbar aus  $s \in V$  hat, dann ergibt der Algorithmus "true" und  $\text{dist}[v] = \delta(s, v)$  für alle  $v \in V$  und der Vorgängerteilgraph  $\text{prev}$  ist ein Baum kürzeste Pfade mit Wurzel  $s$ .
- b. Falls  $G$  hat neg. Zyklen erreichbar aus  $s$ , dann ergibt sich "false".
- 

Beweis (skizze):

- a. Nehme an, kein erreichbar negative Zyklen.

1. Wir zeigen  $\text{dist}[v] = \delta(s, v)$  bei Terminierung.

Sei  $v$  aus  $s$  erreichbar und

$$p = \langle \underbrace{v_0, v_1, \dots, v_k}_{=s}, \underbrace{v_k}_{=v} \rangle$$

einen azyklischen kürzesten Pfad von  $s$

nach  $v$ . (Bem:  $p$  existiert wegen Annahme)

Es folgt  $k \leq |V|-1$ , da  $p$  azyklisch

Jede der  $|V|-1$  Iterationen der for-Schleife

in den Zeilen 11-13 relaxiert alle  $|E|$  Kanten.

In der  $i$ -te Iteration auch  $v_{i-1} \rightarrow v_i$

Da  $p$  ein kürzester Pfad ist, gilt:

$$\boxed{\text{dist}[v]} = \text{dist}[v_k] = \delta(s, v_k) = \boxed{\delta(s, v)}$$

Wenn  $s \not\rightarrow v$ , dann folgt  $\text{dist}[v] = \infty$   
 $= \delta(s, v)$

2. Die Tatsache, daß  $\text{prev}$  ein Baum enthält mit Wurzel  $s$  und nur kürzeste Pfade, folgt aus 1. + die Einfügungen in  $\text{prev}$  im code.

b. Sei  $Z = \langle v_0, \dots, v_k \rangle$  einen negative Zyklus erreichbar aus  $s$ . Also

$$\sum_{i=1}^k W(v_{i-1}, v_i) < 0$$

Widerspruchsbeweis. Nehme, an, BF gibt

"true" (statt "false") zurück.

Wenn BF "true" liefert:

$$(*) \quad \text{dist}[v_i] \leq \text{dist}[v_{i-1}] + W(v_{i-1}, v_i) \quad \forall 0 < i \leq k$$

Summieren über Zyklus  $Z = (v_0, \dots, v_k)$ ,

$$\sum_{i=1}^k \text{dist}[v_i] \leq \sum_{i=1}^k \text{dist}[v_{i-1}] + \sum_{i=1}^k W(v_{i-1}, v_i)$$

$$\text{dist}[v_0] + \dots + \text{dist}[v_{i-k}]$$

$$= \text{dist}[v_k]$$

$$\sum_{i=1}^k \text{dist}[v_i] \leq \sum_{i=1}^k \text{dist}[v_i] + \sum_{i=1}^k W(v_{i-1}, v_i)$$

$$0 \leq \sum_{i=1}^k W(v_{i-1}, v_i)$$

Widerspruch  
zur  
Annahme,  
daß  $Z$   
negativ ist

# Übersicht

- 1 Kürzeste Pfade
- 2 Single-Source Shortest Path
  - Bellman-Ford
  - Dijkstra
- 3 All-Pairs Shortest Paths
  - Transitive Hülle
  - Algorithmus von Warshall
  - Der Algorithmus von Floyd

# Dijkstras Algorithmus

P

P

IS-IS
OSPF

## Annahme

Kantengewichte sind nicht-negativ, d. h.  $W(v, w) \geq 0$  für all  $(v, w) \in E$ .

- ▶ Also: Kürzeste Pfade enthalten keine Zyklen.

EWD 0 . . . .

1 - 10 + 11

Dijkstra find

Volkswagen bus  
= Turing machine



goto considered harmful

1959: MST, SSSP

DNF

semaphoren

Algol 60

TU/e, Austin

Edsger Wybe Dijkstra (1930-2002), Turing Award 1972

# Dijkstras Algorithmus: Übersicht

"gierige" Strategie

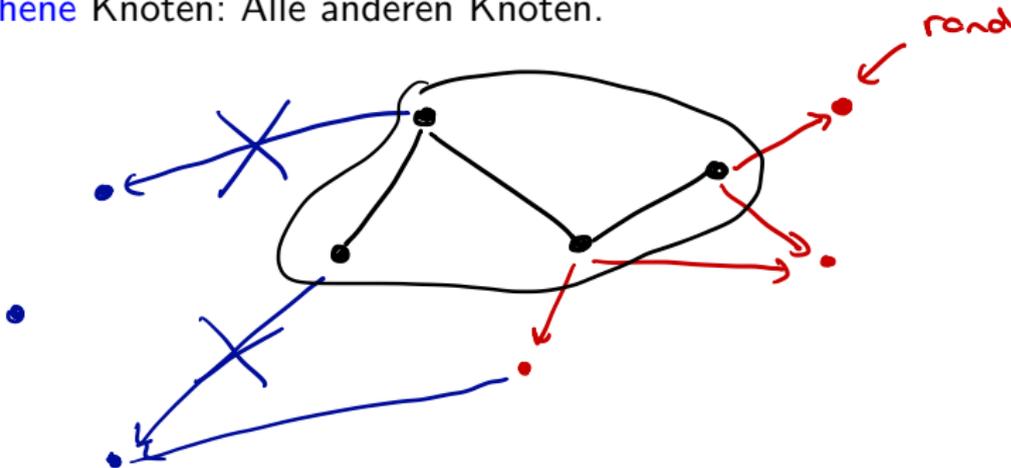
inkrementelle Baumkonstruktion.

Wie beim Algorithmus von Prim ordnen wir die Knoten in drei Kategorien:

**Baumknoten:** Knoten, die Teil vom bis jetzt konstruierten Baum sind.

**Randknoten:** Nicht im Baum, jedoch adjazent zu Knoten im Baum.

**Ungesehene Knoten:** Alle anderen Knoten.



# Dijkstras Algorithmus: Übersicht

Wie beim Algorithmus von Prim ordnen wir die Knoten in drei Kategorien:

**Baumknoten:** Knoten, die Teil vom bis jetzt konstruierten Baum sind.

**Randknoten:** Nicht im Baum, jedoch adjazent zu Knoten im Baum.

**Ungesehene** Knoten: Alle anderen Knoten.

Grundkonzept:

- ▶ **Kein Knoten außerhalb des Baumes hat einen kürzeren Pfad als die Knoten im Baum.**

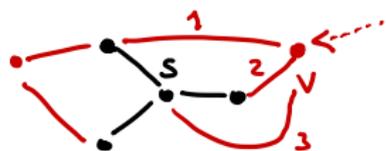
# Dijkstras Algorithmus: Übersicht

Wie beim Algorithmus von Prim ordnen wir die Knoten in drei Kategorien:

**Baumknoten:** Knoten, die Teil vom bis jetzt konstruierten Baum sind.

**Randknoten:** Nicht im Baum, jedoch adjazent zu Knoten im Baum.

**Ungesehene** Knoten: Alle anderen Knoten.



Grundkonzept:

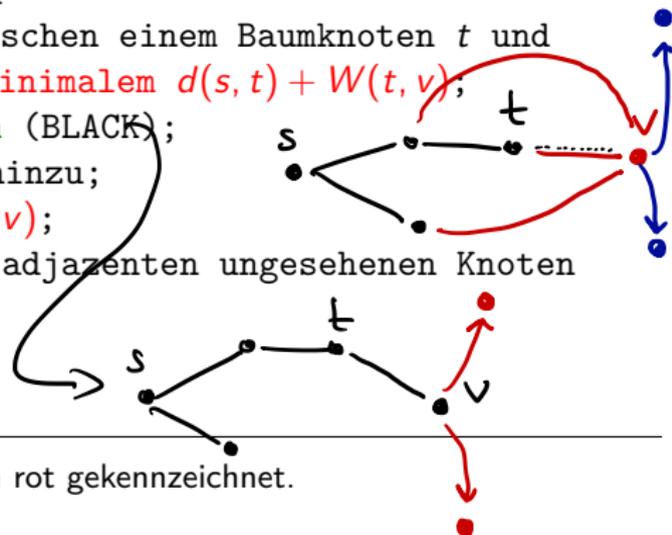
- ▶ **Kein Knoten außerhalb des Baumes hat einen kürzeren Pfad als die Knoten im Baum.**
- ▶ Jedem Knoten  $v$  ist ein Wert  $\text{dist}[v]$  zugeordnet. Dieser Wert ist:
  - ▶ für **Baumknoten**  $\text{dist}[v] = \delta(s, v)$ ;
  - ▶ für **Randknoten** das Minimum der Gewichte aller Pfade vom Startknoten zu  $v$ , wobei die letzte Kante im Schnitt liegt;
  - ▶ für **ungesehenen Knoten**  $+\text{inf}$ .

# Dijkstras Kürzeste-Wege-Algorithmus – Grundgerüst

```

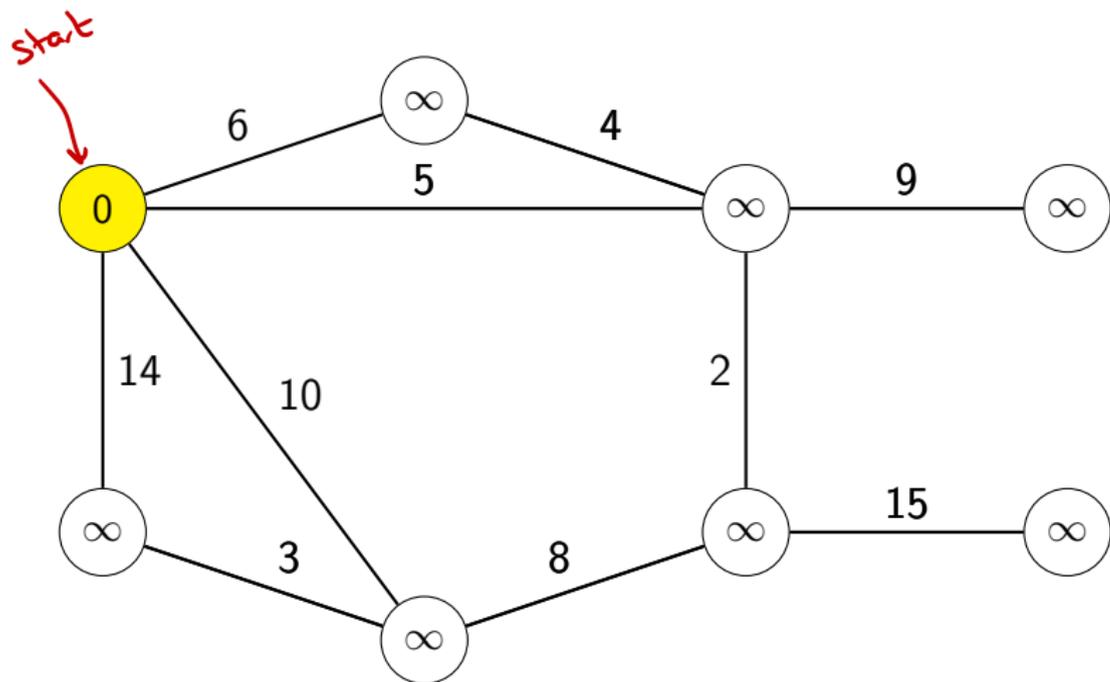
1 // ungerichteter Graph G mit n Knoten
2 void dijkstraSP(Graph G, int n) {
3   initialisiere alle Knoten als ungesehen (WHITE);
4   markiere s als Baum (BLACK) und setze  $d(s,s) = 0$ ;
5   reklassifiziere alle zu s adjazenten Knoten als Rand (GRAY);
6   while (es gibt Randknoten) {
7     wähle von allen Kanten zwischen einem Baumknoten t und
8       einem Randknoten v mit minimalem  $d(s,t) + W(t,v)$ ;
9     reklassifiziere v als Baum (BLACK);
10    füge Kante (t,v) zum Baum hinzu;
11    setze  $d(s,v) = d(s,t) + W(t,v)$ ;
12    reklassifiziere alle zu v adjazenten ungesehenen Knoten
13      mit Rand (GRAY);
14  }
15 }

```

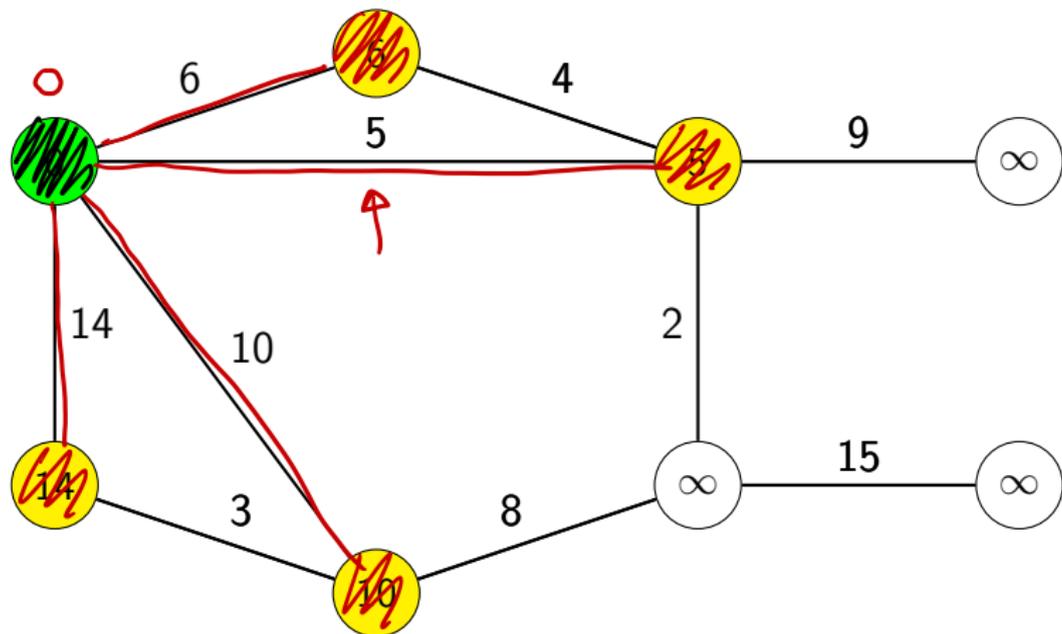


Unterschiede zu Prim's Algorithmus sind in rot gekennzeichnet.

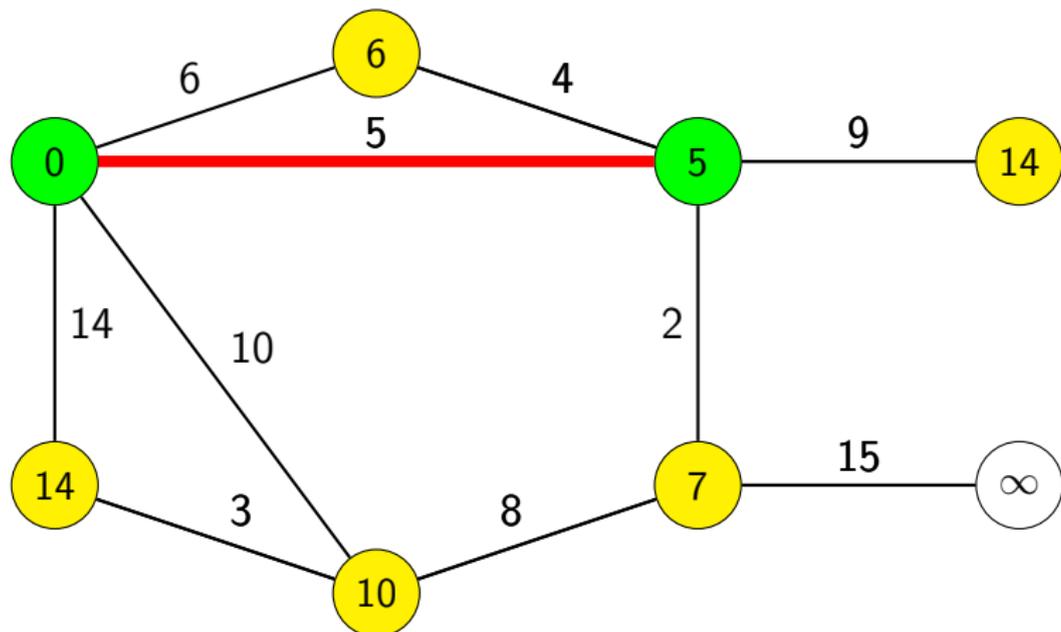
# Dijkstras Kürzeste-Wege-Algorithmus – Beispiel



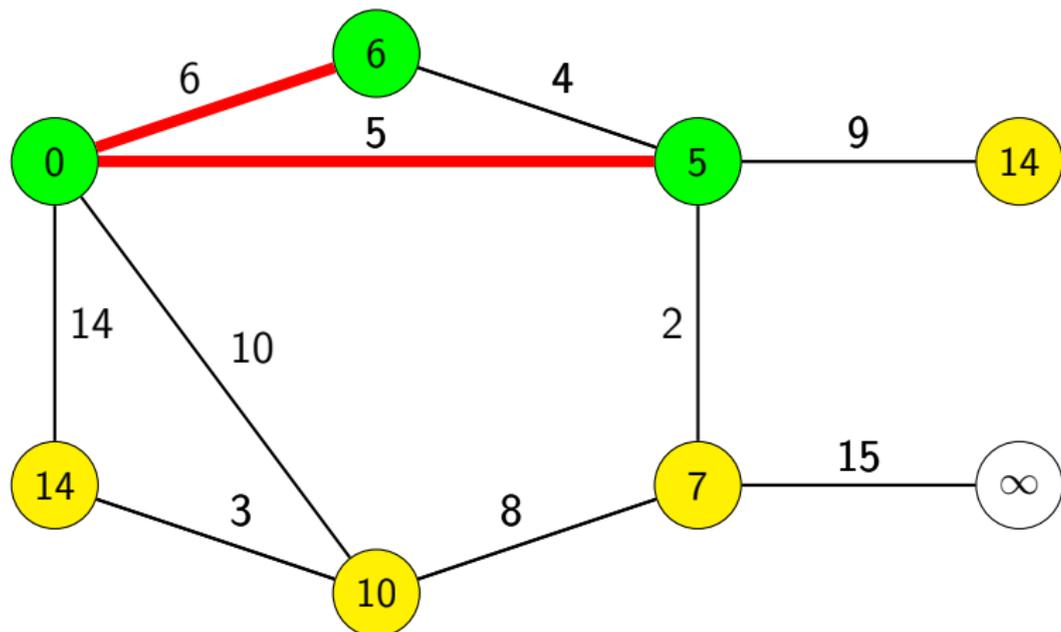
# Dijkstras Kürzeste-Wege-Algorithmus – Beispiel



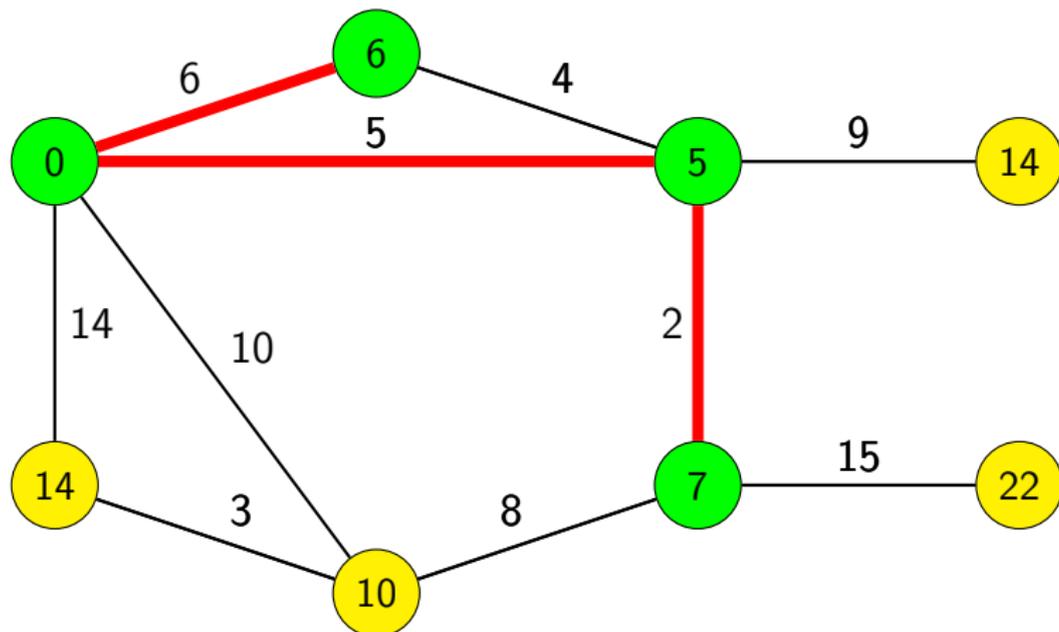
# Dijkstras Kürzeste-Wege-Algorithmus – Beispiel



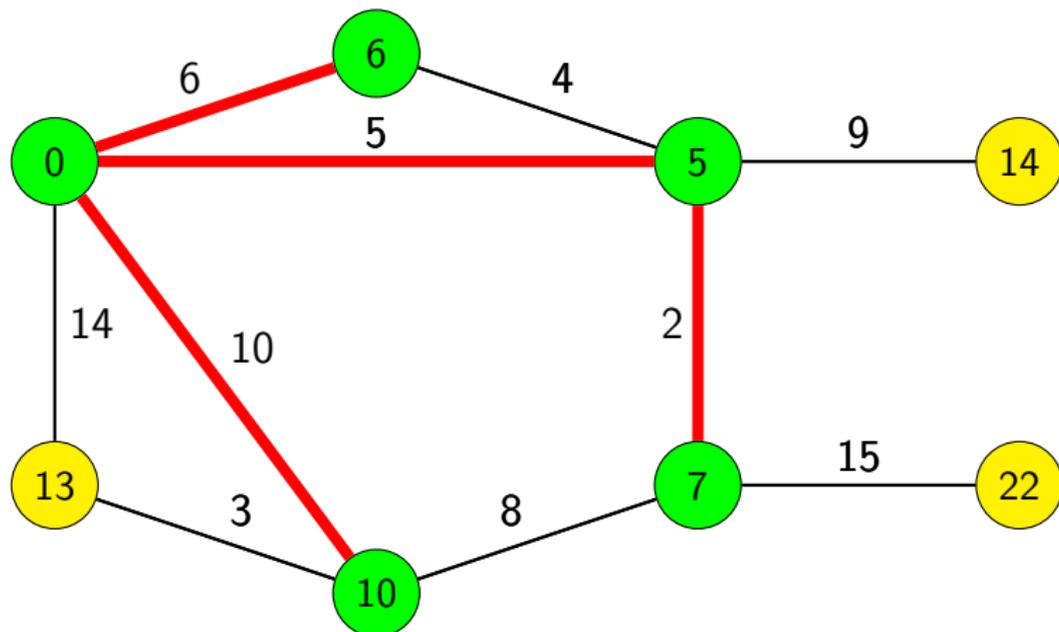
# Dijkstras Kürzeste-Wege-Algorithmus – Beispiel



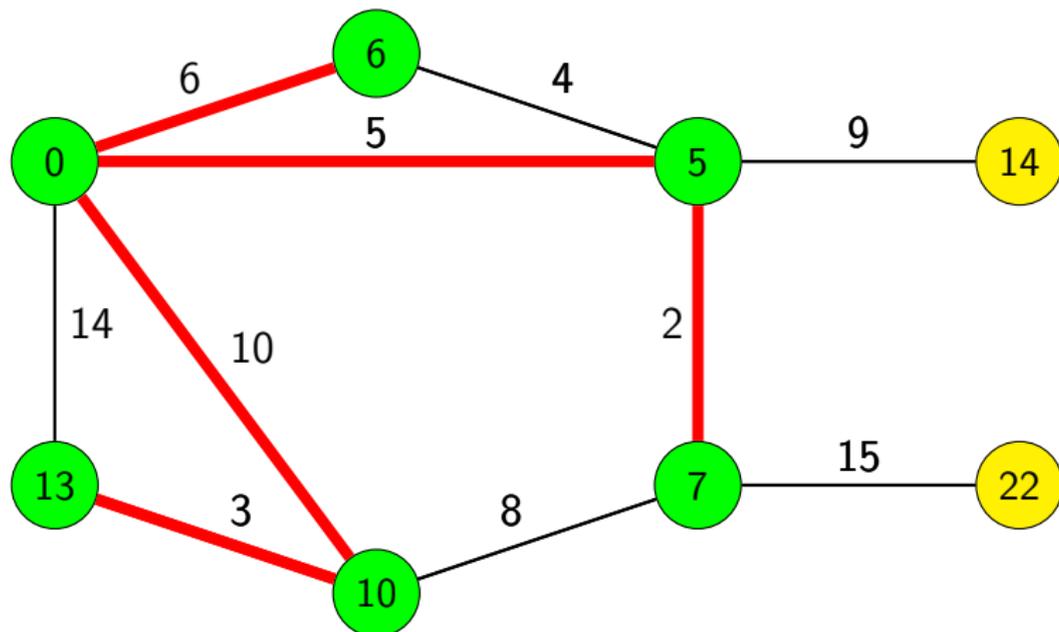
# Dijkstras Kürzeste-Wege-Algorithmus – Beispiel



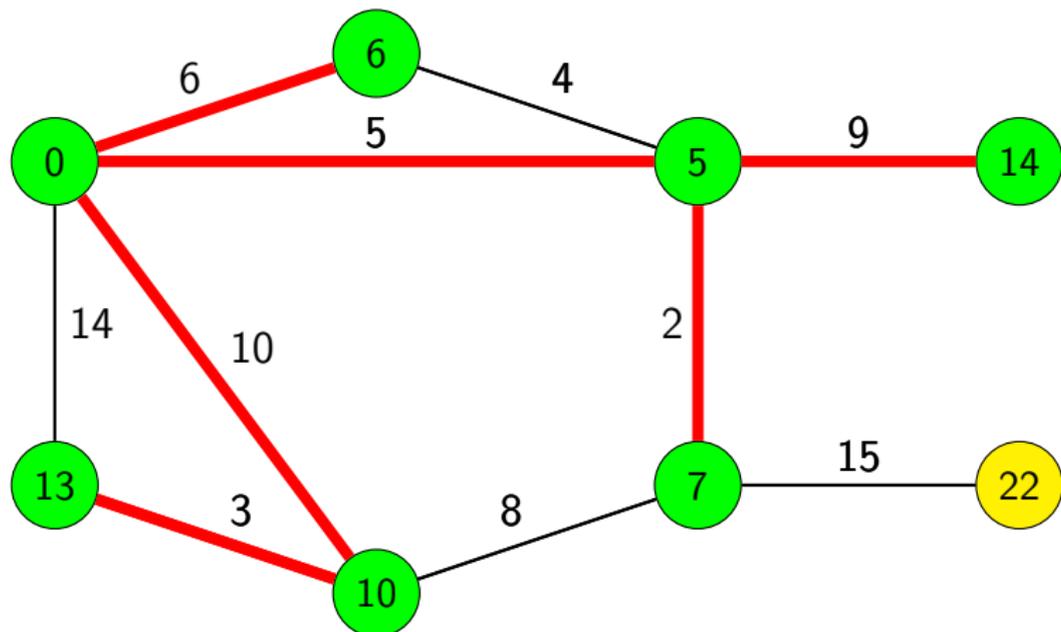
# Dijkstras Kürzeste-Wege-Algorithmus – Beispiel



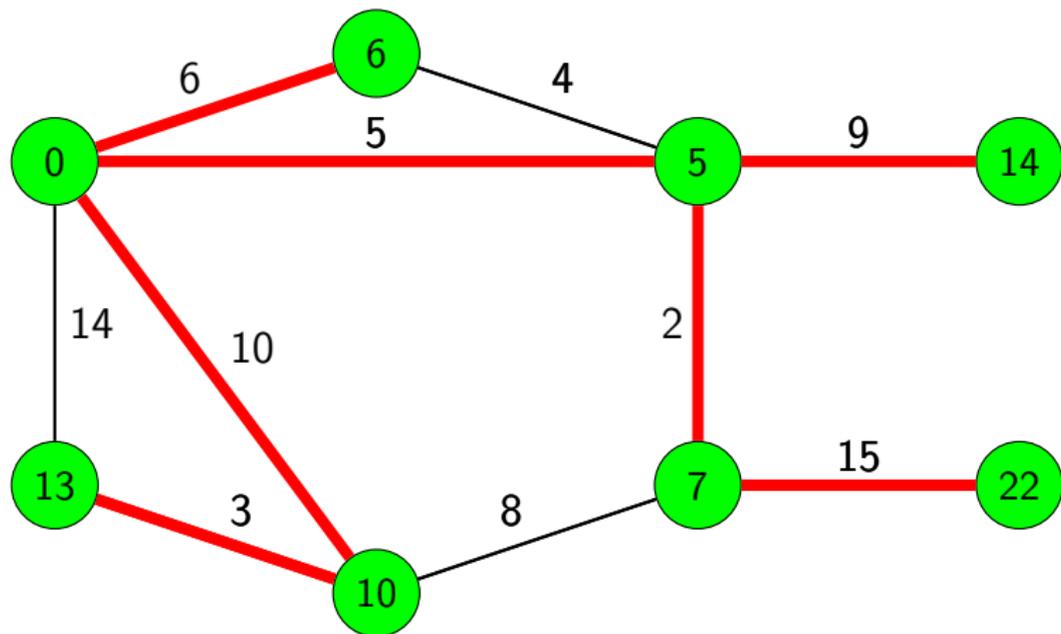
# Dijkstras Kürzeste-Wege-Algorithmus – Beispiel



# Dijkstras Kürzeste-Wege-Algorithmus – Beispiel



# Dijkstras Kürzeste-Wege-Algorithmus – Beispiel



# Dijkstras Algorithmus: Korrektheit

*im Beispiel: grüne/rote*

## Theorem

Sei  $B$  der schon konstruierte (schwarze) Teilbaum. Es gilt:

1.  $\text{dist}[v] \geq \delta(s, v)$  für alle Knoten  $v \in V$ ;

# Dijkstras Algorithmus: Korrektheit

## Theorem

Sei  $B$  der schon konstruierte (schwarze) Teilbaum. Es gilt:

1.  $\text{dist}[v] \geq \delta(s, v)$  für alle Knoten  $v \in V$ ;
2.  $\text{dist}[v] = \delta(s, v)$  für alle Baumknoten  $v \in B$ ; 

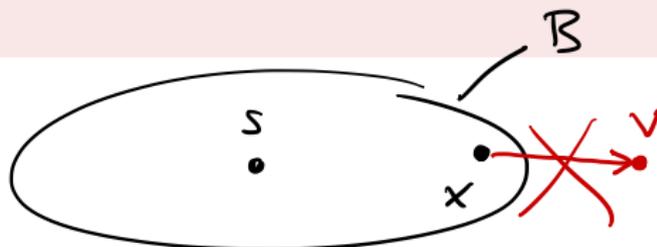
# Dijkstras Algorithmus: Korrektheit

## Theorem

Sei  $B$  der schon konstruierte (schwarze) Teilbaum. Es gilt:

1.  $\text{dist}[v] \geq \delta(s, v)$  für alle Knoten  $v \in V$ ;
2.  $\text{dist}[v] = \delta(s, v)$  für alle Baumknoten  $v \in B$ ;
3.  $\text{dist}[v] = \min(\{\infty\} \cup \{\delta(s, x) + W(x, v) \mid x \in B \text{ und } (x, v) \in E\})$   
für alle Nicht-Baumknoten  $v \in V \setminus B$ ;

kann  $\emptyset$

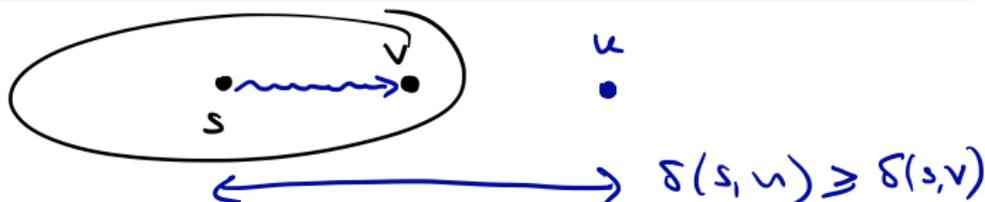


# Dijkstras Algorithmus: Korrektheit

## Theorem

Sei  $B$  der schon konstruierte (schwarze) Teilbaum. Es gilt:

1.  $\text{dist}[v] \geq \delta(s, v)$  für alle Knoten  $v \in V$ ;
2.  $\text{dist}[v] = \delta(s, v)$  für alle Baumknoten  $v \in B$ ;
3.  $\text{dist}[v] = \min(\{\infty\} \cup \{\delta(s, x) + W(x, v) \mid x \in B \text{ und } (x, v) \in E\})$   
für alle Nicht-Baumknoten  $v \in V \setminus B$ ;
4.  $\delta(s, v) \leq \delta(s, u)$  für alle Baumknoten  $v \in B$  und  $u \in V \setminus B$ .



# Dijkstras Algorithmus: Korrektheit

1.  $\text{dist}[v] \geq \delta(s, v)$  für alle Knoten  $v \in V$ ;
2.  $\text{dist}[v] = \delta(s, v)$  für alle Baumknoten  $v \in B$ ;
3.  $\text{dist}[v] = \min(\{\infty\} \cup \{\delta(s, x) + W(x, v) \mid x \in B \text{ und } (x, v) \in E\})$  für  $v \in V \setminus B$ ;
4.  $\delta(s, v) \leq \delta(s, u)$  für alle Baumknoten  $v \in B$  und  $u \in V \setminus B$ .

## Beweis.

1., 3. und 4. sind (ziemlich) trivial. Betrachte 2.

# Dijkstras Algorithmus: Korrektheit

1.  $\text{dist}[v] \geq \delta(s, v)$  für alle Knoten  $v \in V$ ;
2.  $\text{dist}[v] = \delta(s, v)$  für alle Baumknoten  $v \in B$ ;
3.  $\text{dist}[v] = \min(\{\infty\} \cup \{\delta(s, x) + W(x, v) \mid x \in B \text{ und } (x, v) \in E\})$  für  $v \in V \setminus B$ ;
4.  $\delta(s, v) \leq \delta(s, u)$  für alle Baumknoten  $v \in B$  und  $u \in V \setminus B$ .

## Beweis.

1., 3. und 4. sind (ziemlich) trivial. Betrachte 2. Per Induktion über die Anzahl der Baumknoten. Beweisskizze:

# Dijkstras Algorithmus: Korrektheit

1.  $\text{dist}[v] \geq \delta(s, v)$  für alle Knoten  $v \in V$ ;
2.  $\text{dist}[v] = \delta(s, v)$  für alle Baumknoten  $v \in B$ ;
3.  $\text{dist}[v] = \min(\{\infty\} \cup \{\delta(s, x) + W(x, v) \mid x \in B \text{ und } (x, v) \in E\})$  für  $v \in V \setminus B$ ;
4.  $\delta(s, v) \leq \delta(s, u)$  für alle Baumknoten  $v \in B$  und  $u \in V \setminus B$ .

## Beweis.

1., 3. und 4. sind (ziemlich) trivial. Betrachte 2. Per Induktion über die Anzahl der Baumknoten. Beweisskizze:

- ▶ Basis:  $B$  ist leer und  $B = \{s\}$  (nach der ersten Iteration): trivial.

# Dijkstras Algorithmus: Korrektheit

1.  $\text{dist}[v] \geq \delta(s, v)$  für alle Knoten  $v \in V$ ;
2.  $\text{dist}[v] = \delta(s, v)$  für alle Baumknoten  $v \in B$ ;
3.  $\text{dist}[v] = \min(\{\infty\} \cup \{\delta(s, x) + W(x, v) \mid x \in B \text{ und } (x, v) \in E\})$  für  $v \in V \setminus B$ ;
4.  $\delta(s, v) \leq \delta(s, u)$  für alle Baumknoten  $v \in B$  und  $u \in V \setminus B$ .

## Beweis.

1., 3. und 4. sind (ziemlich) trivial. Betrachte 2. Per Induktion über die Anzahl der Baumknoten. Beweisskizze:

- ▶ Basis:  $B$  ist leer und  $B = \{s\}$  (nach der ersten Iteration): trivial.
- ▶ Ind. Schritt: nehme an, das Theorem gilt für  $|B| = k > 0$ .

# Dijkstras Algorithmus: Korrektheit

1.  $\text{dist}[v] \geq \delta(s, v)$  für alle Knoten  $v \in V$ ;
2.  $\text{dist}[v] = \delta(s, v)$  für alle Baumknoten  $v \in B$ ;
3.  $\text{dist}[v] = \min(\{\infty\} \cup \{\delta(s, x) + W(x, v) \mid x \in B \text{ und } (x, v) \in E\})$  für  $v \in V \setminus B$ ;
4.  $\delta(s, v) \leq \delta(s, u)$  für alle Baumknoten  $v \in B$  und  $u \in V \setminus B$ .

## Beweis.

1., 3. und 4. sind (ziemlich) trivial. Betrachte 2. Per Induktion über die Anzahl der Baumknoten. Beweisskizze:

- ▶ Basis:  $B$  ist leer und  $B = \{s\}$  (nach der ersten Iteration): trivial.
- ▶ Ind. Schritt: nehme an, das Theorem gilt für  $|B| = k > 0$ . Sei  $v$  der Knoten der als nächste zum Baum  $B$  hinzugefügt wird.



# Dijkstras Algorithmus: Korrektheit

1.  $\text{dist}[v] \geq \delta(s, v)$  für alle Knoten  $v \in V$ ;
2.  $\text{dist}[v] = \delta(s, v)$  für alle Baumknoten  $v \in B$ ;
3.  $\text{dist}[v] = \min(\{\infty\} \cup \{\delta(s, x) + W(x, v) \mid x \in B \text{ und } (x, v) \in E\})$  für  $v \in V \setminus B$ ;
4.  $\delta(s, v) \leq \delta(s, u)$  für alle Baumknoten  $v \in B$  und  $u \in V \setminus B$ .

## Beweis.

1., 3. und 4. sind (ziemlich) trivial. Betrachte 2. Per Induktion über die Anzahl der Baumknoten. Beweisskizze:

- ▶ Basis:  $B$  ist leer und  $B = \{s\}$  (nach der ersten Iteration): trivial.
- ▶ Ind. Schritt: nehme an, das Theorem gilt für  $|B| = k > 0$ . Sei  $v$  der Knoten der als nächste zum Baum  $B$  hinzugefügt wird. Der Fall  $\text{dist}[v] = +\infty$  ist trivial.

# Dijkstras Algorithmus: Korrektheit

1.  $\text{dist}[v] \geq \delta(s, v)$  für alle Knoten  $v \in V$ ;
2.  $\text{dist}[v] = \delta(s, v)$  für alle Baumknoten  $v \in B$ ;
3.  $\text{dist}[v] = \min(\{\infty\} \cup \{\delta(s, x) + W(x, v) \mid x \in B \text{ und } (x, v) \in E\})$  für  $v \in V \setminus B$ ;
4.  $\delta(s, v) \leq \delta(s, u)$  für alle Baumknoten  $v \in B$  und  $u \in V \setminus B$ .

## Beweis.

1., 3. und 4. sind (ziemlich) trivial. Betrachte 2. Per Induktion über die Anzahl der Baumknoten. Beweisskizze:

- ▶ Basis:  $B$  ist leer und  $B = \{s\}$  (nach der ersten Iteration): trivial.
- ▶ Ind. Schritt: nehme an, das Theorem gilt für  $|B| = k > 0$ . Sei  $v$  der Knoten der als nächste zum Baum  $B$  hinzugefügt wird. Der Fall  $\text{dist}[v] = +\text{inf}$  ist trivial. Betrachte  $\text{dist}[v] \neq +\text{inf}$ .

# Dijkstras Algorithmus: Korrektheit

1.  $\text{dist}[v] \geq \delta(s, v)$  für alle Knoten  $v \in V$ ;
2.  $\text{dist}[v] = \delta(s, v)$  für alle Baumknoten  $v \in B$ ;
3.  $\text{dist}[v] = \min(\{\infty\} \cup \{\delta(s, x) + W(x, v) \mid x \in B \text{ und } (x, v) \in E\})$  für  $v \in V \setminus B$ ;
4.  $\delta(s, v) \leq \delta(s, u)$  für alle Baumknoten  $v \in B$  und  $u \in V \setminus B$ .

## Beweis.

1., 3. und 4. sind (ziemlich) trivial. Betrachte 2. Per Induktion über die Anzahl der Baumknoten. Beweisskizze:

- ▶ Basis:  $B$  ist leer und  $B = \{s\}$  (nach der ersten Iteration): trivial.
- ▶ Ind. Schritt: nehme an, das Theorem gilt für  $|B| = k > 0$ . Sei  $v$  der Knoten der als nächste zum Baum  $B$  hinzugefügt wird. Der Fall  $\text{dist}[v] = +\text{inf}$  ist trivial. Betrachte  $\text{dist}[v] \neq +\text{inf}$ . Dann gibt es eine Kante vom Baumknoten  $x = \text{prev}[v] \in B$  zu  $v \notin B$ .



# Dijkstras Algorithmus: Korrektheit

1.  $\text{dist}[v] \geq \delta(s, v)$  für alle Knoten  $v \in V$ ;
2.  $\text{dist}[v] = \delta(s, v)$  für alle Baumknoten  $v \in B$ ;
3.  $\text{dist}[v] = \min(\{\infty\} \cup \{\delta(s, x) + W(x, v) \mid x \in B \text{ und } (x, v) \in E\})$  für  $v \in V \setminus B$ ;
4.  $\delta(s, v) \leq \delta(s, u)$  für alle Baumknoten  $v \in B$  und  $u \in V \setminus B$ .

## Beweis.

1., 3. und 4. sind (ziemlich) trivial. Betrachte 2. Per Induktion über die Anzahl der Baumknoten. Beweisskizze:

- ▶ Basis:  $B$  ist leer und  $B = \{s\}$  (nach der ersten Iteration): trivial.
- ▶ Ind. Schritt: nehme an, das Theorem gilt für  $|B| = k > 0$ . Sei  $v$  der Knoten der als nächste zum Baum  $B$  hinzugefügt wird. Der Fall  $\text{dist}[v] = +\text{inf}$  ist trivial. Betrachte  $\text{dist}[v] \neq +\text{inf}$ . Dann gibt es eine Kante vom Baumknoten  $x = \text{prev}[v] \in B$  zu  $v \notin B$ . Aus 3. folgt, dass  $\text{dist}[v]$  das Gewicht des kürzesten Pfades von  $s$  nach  $v$  über Baumknoten ist.

# Dijkstras Algorithmus: Korrektheit

1.  $\text{dist}[v] \geq \delta(s, v)$  für alle Knoten  $v \in V$ ;
2.  $\text{dist}[v] = \delta(s, v)$  für alle Baumknoten  $v \in B$ ;
3.  $\text{dist}[v] = \min(\{\infty\} \cup \{\delta(s, x) + W(x, v) \mid x \in B \text{ und } (x, v) \in E\})$  für  $v \in V \setminus B$ ;
4.  $\delta(s, v) \leq \delta(s, u)$  für alle Baumknoten  $v \in B$  und  $u \in V \setminus B$ .

## Beweis.

1., 3. und 4. sind (ziemlich) trivial. Betrachte 2. Per Induktion über die Anzahl der Baumknoten. Beweisskizze:

- ▶ Basis:  $B$  ist leer und  $B = \{s\}$  (nach der ersten Iteration): trivial.
- ▶ Ind. Schritt: nehme an, das Theorem gilt für  $|B| = k > 0$ . Sei  $v$  der Knoten der als nächste zum Baum  $B$  hinzugefügt wird. Der Fall  $\text{dist}[v] = +\text{inf}$  ist trivial. Betrachte  $\text{dist}[v] \neq +\text{inf}$ . Dann gibt es eine Kante vom Baumknoten  $x = \text{prev}[v] \in B$  zu  $v \notin B$ . Aus 3. folgt, dass  $\text{dist}[v]$  das Gewicht des kürzesten Pfades von  $s$  nach  $v$  über Baumknoten ist. Aus 4. und der Wahl von  $v$  folgt, dass es keinen kürzeren Pfad gibt, d.h.,  $\text{dist}[v] = \delta(s, v)$ .



# Korrektheit

## Theorem (Korrektheit)

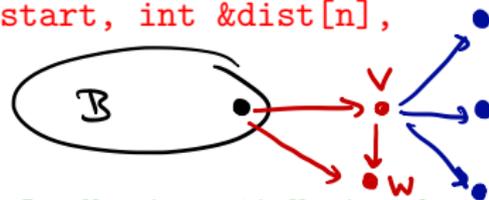
Dijkstras Algorithmus berechnet den kürzesten Abstand von Knoten  $s$  zu jedem von  $s$  erreichbaren Knoten in  $G$ .

# Dijkstras Algorithmus – Implementierung

```

1 //Input: gewichteter Graph mit n Knoten, Startknoten
2 void dijkstra(int adj[n], int n, int start, int &dist[n],
3               int &prev[n]) {
4     for (int i = 0; i < n; i++) {
5         dist[i] = inf; prev[i] = -1;
6     }
7     dist[start] = 0; //start ist einziger Randknoten mit Kosten 0
8     Q = 0, ..., n-1; //Q enthält alle ungesehenen Knoten und
9                     //alle Randknoten
10    while (Q not empty) {
11        //verschiebe den billigsten Randknoten v in den Baum:
12        //extractMin(Q) bestimmt ein Element e aus Q mit minimalem dist[e],
13        //entfernt e aus Q und gibt e zurück = delMin + getMin
14        v = extractMin(Q);
15        for each (edge in adj[v]) //aktualisiere Kosten für Randknoten
16            if (edge.target in Q and
17                dist[v]+edge.weight < dist[edge.target]) {
18                dist[edge.target] = dist[v] + edge.weight;
19                prev[edge.target] = v;
20            }
21    }

```



# Eigenschaften von Dijkstras Algorithmus

- ▶ Kürzeste Wege werden mit zunehmendem Abstand zur Quelle  $s$  gefunden.

4-

# Eigenschaften von Dijkstras Algorithmus

- ▶ Kürzeste Wege werden mit zunehmendem Abstand zur Quelle  $s$  gefunden.
- ▶ Implementierung: Ähnlich dem Algorithmus von Prim.

# Eigenschaften von Dijkstras Algorithmus

- ▶ Kürzeste Wege werden mit zunehmendem Abstand zur Quelle  $s$  gefunden.
- ▶ Implementierung: Ähnlich dem Algorithmus von Prim.
- ▶ Zeitkomplexität im Worst-Case:  $\Theta(|V|^2)$ .

# Eigenschaften von Dijkstras Algorithmus

- ▶ Kürzeste Wege werden mit zunehmendem Abstand zur Quelle  $s$  gefunden.
- ▶ Implementierung: Ähnlich dem Algorithmus von Prim.
- ▶ Zeitkomplexität im Worst-Case:  $\Theta(|V|^2)$ .
- ▶ Mit geschickten Prioritätswarteschlangen:  $\Theta(|E| + |V| \cdot \log |V|)$

Fibonacci-Heaps

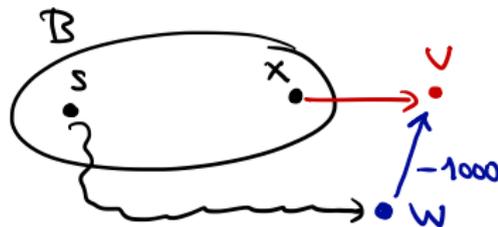
BF:  $\Theta(|E| \cdot |V|)$

# Eigenschaften von Dijkstras Algorithmus

- ▶ Kürzeste Wege werden mit zunehmendem Abstand zur Quelle  $s$  gefunden.
- ▶ Implementierung: Ähnlich dem Algorithmus von Prim.
- ▶ Zeitkomplexität im Worst-Case:  $\Theta(|V|^2)$ .
- ▶ Mit geschickten Prioritätswarteschlangen:  $\Theta(|E| + |V| \cdot \log |V|)$
- ▶ Untere Schranke der Komplexität:  $\Omega(|E|)$ .
  - ▶ da im schlimmsten Fall alle Kanten überprüft werden müssen.

# Eigenschaften von Dijkstras Algorithmus

- ▶ Kürzeste Wege werden mit zunehmendem Abstand zur Quelle  $s$  gefunden.
- ▶ Implementierung: Ähnlich dem Algorithmus von Prim.
- ▶ Zeitkomplexität im Worst-Case:  $\Theta(|V|^2)$ .
- ▶ Mit geschickten Prioritätswarteschlangen:  $\Theta(|E| + |V| \cdot \log |V|)$
- ▶ Untere Schranke der Komplexität:  $\Omega(|E|)$ .
  - ▶ da im schlimmsten Fall alle Kanten überprüft werden müssen.
- ▶ Platzkomplexität:  $O(|V|)$ .
- ▶ Erlaubt keine negative Kosten. Warum?



# Übersicht

- 1 Kürzeste Pfade
- 2 Single-Source Shortest Path
  - Bellman-Ford
  - Dijkstra
- 3 All-Pairs Shortest Paths
  - Transitive Hülle
  - Algorithmus von Warshall
  - Der Algorithmus von Floyd

# All-Pairs Shortest Paths

Wir betrachten gewichtete gerichtete Graphen  $G = (V, E, W)$ .

- ▶ Negative Gewichte sind zugelassen, aber keine Zyklen mit negativem Gewicht.
- ▶ Nicht vorhandene Kanten haben Gewicht  $W(\cdot, \cdot) = +\text{inf}$ .

# All-Pairs Shortest Paths

Wir betrachten gewichtete gerichtete Graphen  $G = (V, E, W)$ .

- ▶ Negative Gewichte sind zugelassen, aber keine Zyklen mit negativem Gewicht.
- ▶ Nicht vorhandene Kanten haben Gewicht  $W(\cdot, \cdot) = +\text{inf}$ .

## Problem (All-Pairs Shortest Path)

*Berechne für jedes Paar  $i, j$  das Gewicht  $D[i, j]$  des kürzesten Pfades.*

# All-Pairs Shortest Paths

Wir betrachten gewichtete gerichtete Graphen  $G = (V, E, W)$ .

- ▶ Negative Gewichte sind zugelassen, aber keine Zyklen mit negativem Gewicht.
- ▶ Nicht vorhandene Kanten haben Gewicht  $W(\cdot, \cdot) = +\infty$ .

## Problem (All-Pairs Shortest Path)

*Berechne für jedes Paar  $i, j$  das Gewicht  $D[i, j]$  des kürzesten Pfades.*

Naive Lösung:

wende ein SSSP-Algorithmus (z.B. Bellman-Ford)  $|V|$  mal an.

# All-Pairs Shortest Paths

Wir betrachten gewichtete gerichtete Graphen  $G = (V, E, W)$ .

- ▶ Negative Gewichte sind zugelassen, aber keine Zyklen mit negativem Gewicht.
- ▶ Nicht vorhandene Kanten haben Gewicht  $W(\cdot, \cdot) = +\text{inf}$ .

## Problem (All-Pairs Shortest Path)

*Berechne für jedes Paar  $i, j$  das Gewicht  $D[i, j]$  des kürzesten Pfades.*

Naive Lösung:

wende ein SSSP-Algorithmus (z.B. Bellman-Ford)  $|V|$  mal an.

Dies führt zu einer Worst-Case Zeitkomplexität  $\mathcal{O}(|V|^4)$ .

Effizientere Version: [Floyd's Algorithmus](#).

# Binäre Relationen

## Binäre Relation

Eine (binäre) Relation über einer Menge  $S$  ist eine Teilmenge von  $R \subseteq S \times S = S^2$ .

# Binäre Relationen

## Binäre Relation

Eine (binäre) Relation über einer Menge  $S$  ist eine Teilmenge von  $R \subseteq S \times S = S^2$ .

## Reflexivität, Transitivität

Eine Relation  $R$  ist **reflexiv**, wenn  $(u, u) \in R$  für alle  $u \in S$ .

Sie heißt **transitiv**, wenn aus  $(u, v) \in R$  und  $(v, w) \in R$  folgt  $(u, w) \in R$ .

# Binäre Relationen

## Binäre Relation

Eine (binäre) Relation über einer Menge  $S$  ist eine Teilmenge von  $R \subseteq S \times S = S^2$ .

## Reflexivität, Transitivität

Eine Relation  $R$  ist **reflexiv**, wenn  $(u, u) \in R$  für alle  $u \in S$ .

Sie heißt **transitiv**, wenn aus  $(u, v) \in R$  und  $(v, w) \in R$  folgt  $(u, w) \in R$ .

## Transitive Hülle

Die **transitive Hülle**  $R^*$  einer Relation  $R$  ist die kleinste Erweiterung (Obermenge)  $R \subseteq R^* \subseteq S^2$ , so dass  $R^*$  reflexiv und transitiv ist.

# Binäre Relationen

## Binäre Relation

Eine (binäre) Relation über einer Menge  $S$  ist eine Teilmenge von  $R \subseteq S \times S = S^2$ .

## Reflexivität, Transitivität

Eine Relation  $R$  ist **reflexiv**, wenn  $(u, u) \in R$  für alle  $u \in S$ .

Sie heißt **transitiv**, wenn aus  $(u, v) \in R$  und  $(v, w) \in R$  folgt  $(u, w) \in R$ .

## Transitive Hülle

Die **transitive Hülle**  $R^*$  einer Relation  $R$  ist die kleinste Erweiterung (Obermenge)  $R \subseteq R^* \subseteq S^2$ , so dass  $R^*$  reflexiv und transitiv ist.

## Transitive Hülle eines Graphen

Für Graphen mit  $S = V$  und  $R = E$  gilt:

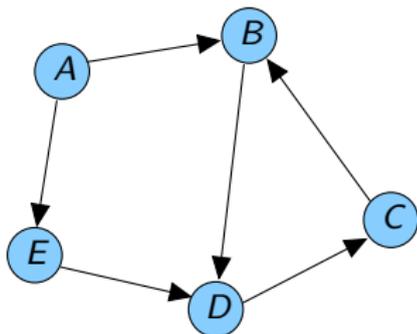
$(u, v) \in R^*$  gdw. es gibt einen Pfad von  $u$  nach  $v$ .

# Transitive Hülle: Beispiel

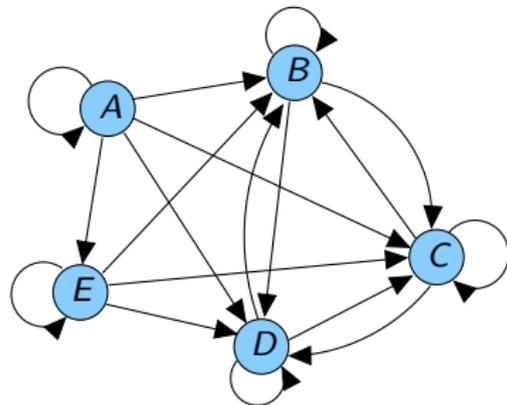
$$R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

und die transitive Hülle  $R^* =$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$



Binäre Relation  $R$



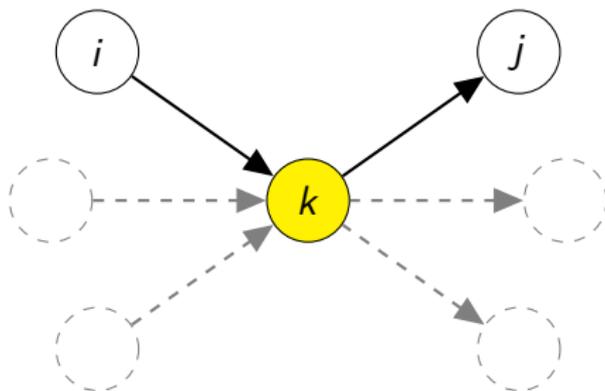
Transitive Hülle  $R^*$

# Übersicht

- 1 Kürzeste Pfade
- 2 Single-Source Shortest Path
  - Bellman-Ford
  - Dijkstra
- 3 All-Pairs Shortest Paths
  - Transitive Hülle
  - Algorithmus von Warshall
  - Der Algorithmus von Floyd

# Algorithmus von Warshall: Idee

- ▶ Aus  $R[i, k]$  und  $R[k, j]$  folgt die Erreichbarkeit  $R[i, j] = \text{true}$ .



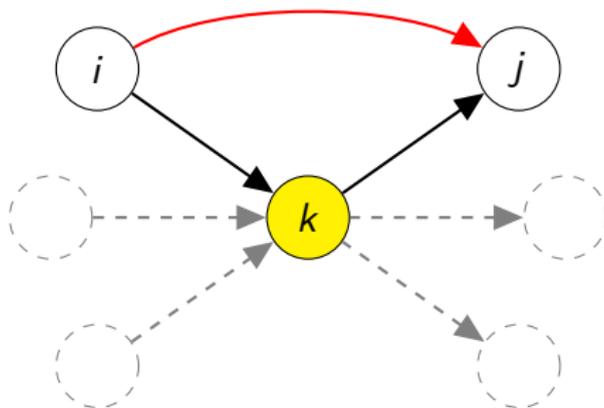
---

```
1 foreach ( $k \in V$ )
2   foreach (eingehende Kante  $(i, k) \in E$ )
3     foreach (ausgehende Kante  $(k, j) \in E$ )
4       Füge  $(i, j)$  zu  $E$  hinzu.
```

---

# Algorithmus von Warshall: Idee

- ▶ Aus  $R[i,k]$  und  $R[k,j]$  folgt die Erreichbarkeit  $R[i,j] = \text{true}$ .



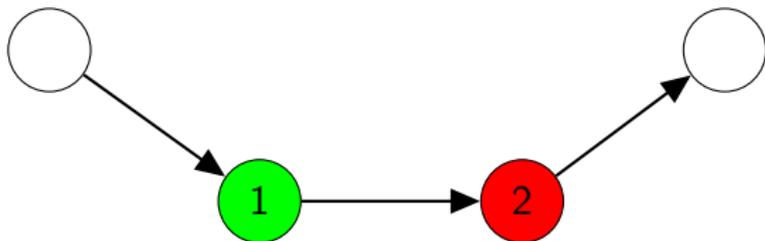
---

```
1 foreach ( $k \in V$ )
2   foreach (eingehende Kante  $(i,k) \in E$ )
3     foreach (ausgehende Kante  $(k,j) \in E$ )
4       Füge  $(i,j)$  zu  $E$  hinzu.
```

---

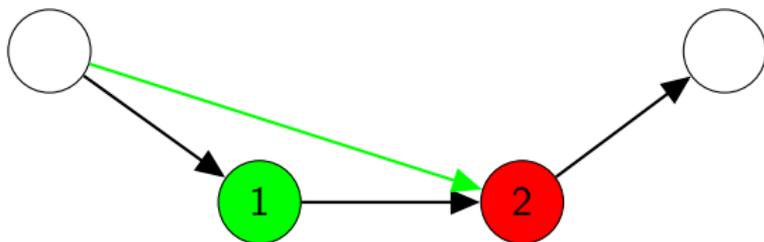
# Algorithmus von Warshall: Idee

Das reicht bereits aus, um längere Pfade zu berücksichtigen:



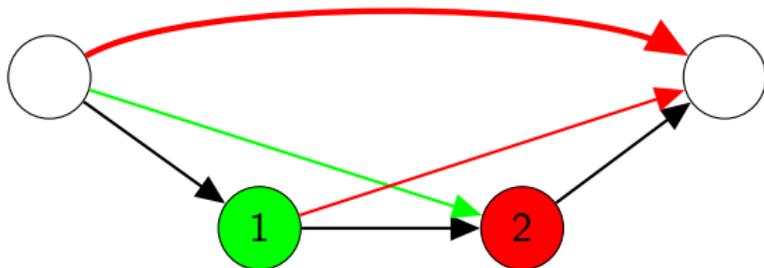
# Algorithmus von Warshall: Idee

Das reicht bereits aus, um längere Pfade zu berücksichtigen:



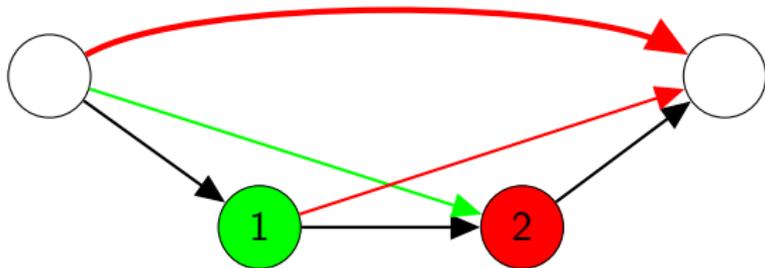
# Algorithmus von Warshall: Idee

Das reicht bereits aus, um längere Pfade zu berücksichtigen:

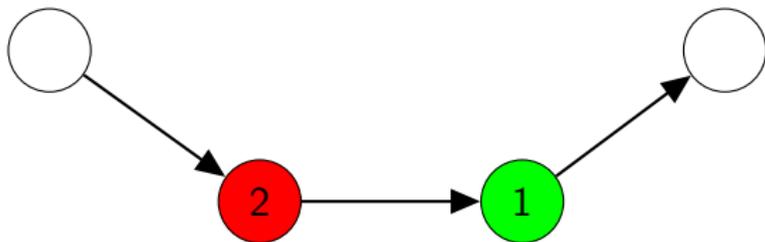


# Algorithmus von Warshall: Idee

Das reicht bereits aus, um längere Pfade zu berücksichtigen:

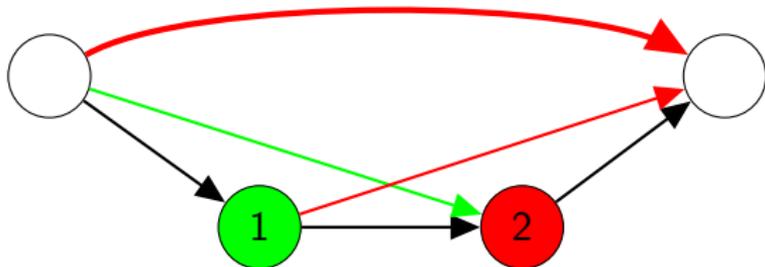


- Die Reihenfolge spielt dabei keine Rolle:

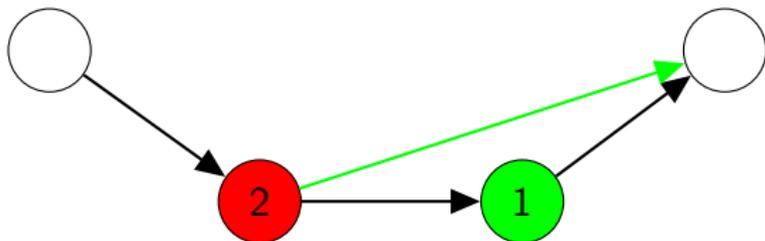


# Algorithmus von Warshall: Idee

Das reicht bereits aus, um längere Pfade zu berücksichtigen:

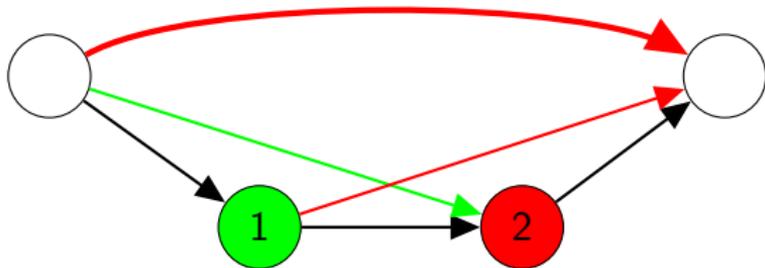


- ▶ Die Reihenfolge spielt dabei keine Rolle:

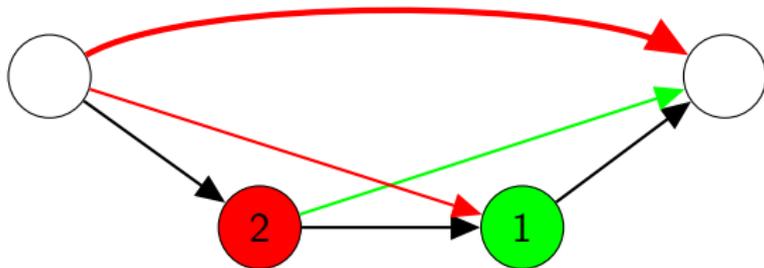


# Algorithmus von Warshall: Idee

Das reicht bereits aus, um längere Pfade zu berücksichtigen:

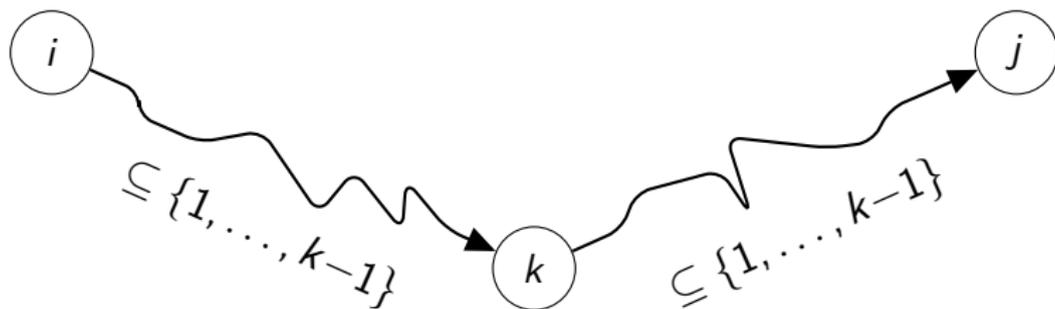


- ▶ Die Reihenfolge spielt dabei keine Rolle:



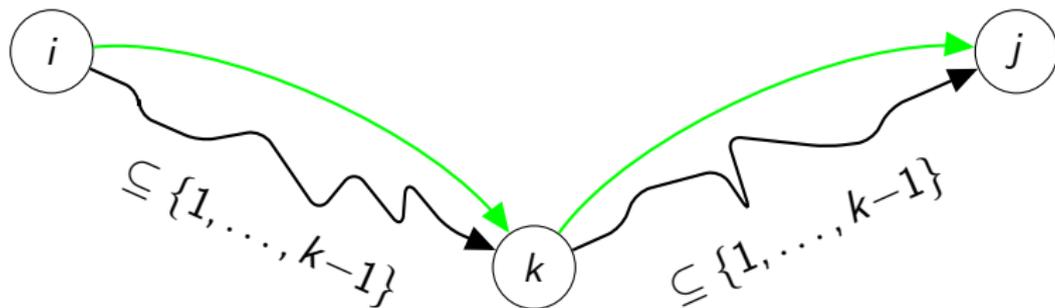
# Algorithmus von Warshall: Idee

Allgemeiner Fall:



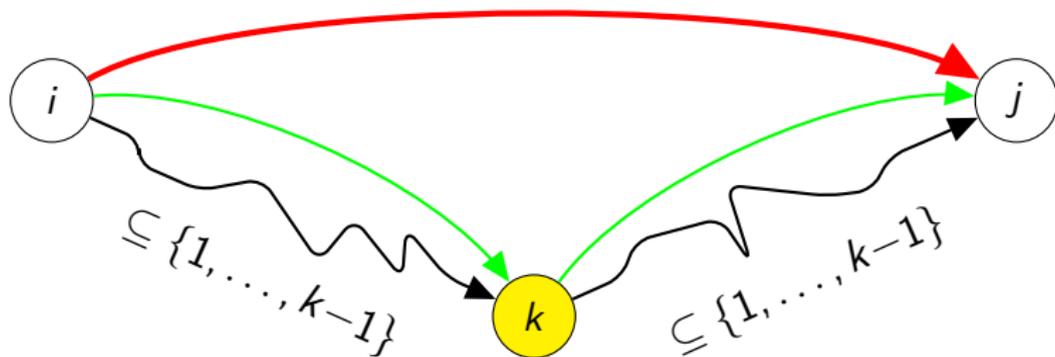
# Algorithmus von Warshall: Idee

Allgemeiner Fall:



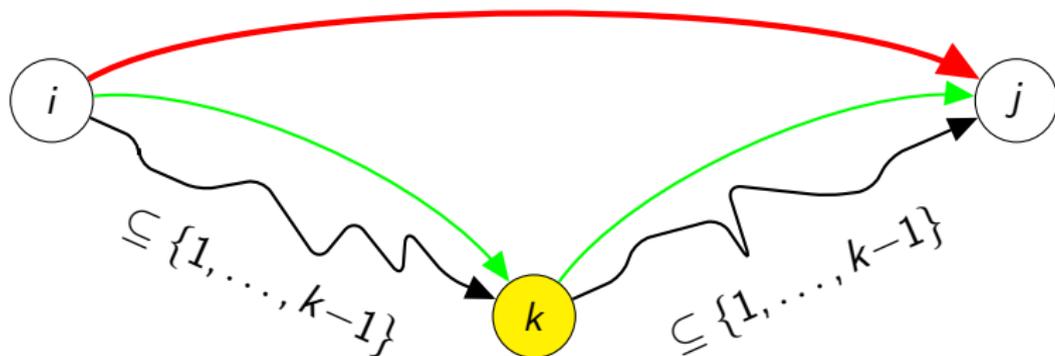
# Algorithmus von Warshall: Idee

Allgemeiner Fall:



# Algorithmus von Warshall: Idee

Allgemeiner Fall:



- Das lässt sich als Rekursionsgleichung schreiben, wobei  $t_{ij}^{(k)} = \text{true}$  besagt, dass nach Berücksichtigung der Zwischenknoten  $\{1, \dots, k\}$  der Knoten  $j$  von  $i$  aus erreichbar ist:

$$t_{ij}^{(k)} = t_{ij}^{(k-1)} \vee \left( t_{ik}^{(k-1)} \wedge t_{kj}^{(k-1)} \right)$$

# Algorithmus von Warshall: Idee

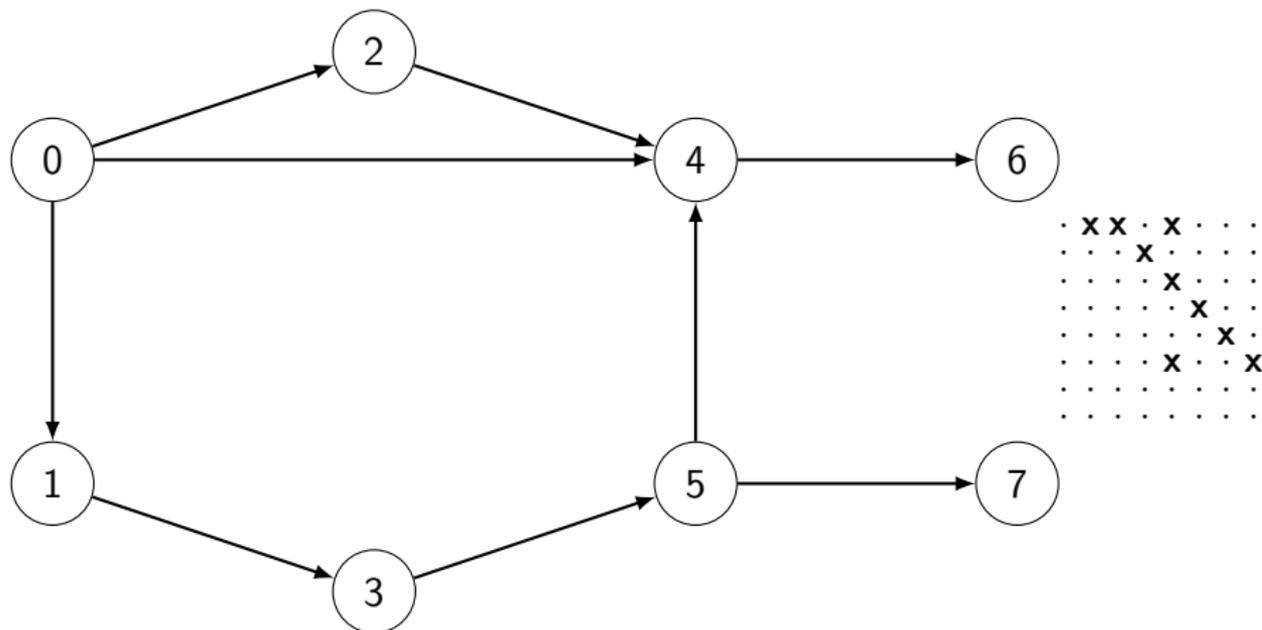
$$t_{ij}^{(k)} = \begin{cases} \text{false} & \text{für } k = 0, \text{ falls } (i, j) \notin E \\ \text{true} & \text{für } k = 0, \text{ falls } (i, j) \in E \\ t_{ij}^{(k-1)} \vee (t_{ik}^{(k-1)} \wedge t_{kj}^{(k-1)}) & \text{für } k > 0 \end{cases}$$

# Algorithmus von Warshall: Idee

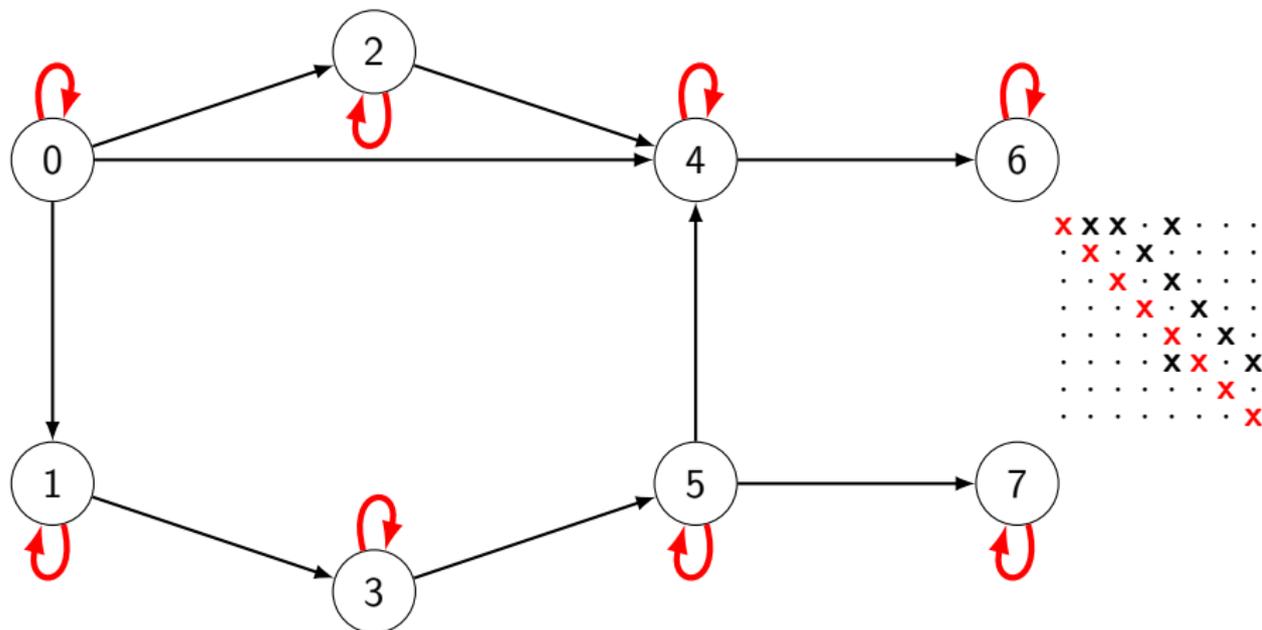
$$t_{ij}^{(k)} = \begin{cases} \text{false} & \text{für } k = 0, \text{ falls } (i, j) \notin E \\ \text{true} & \text{für } k = 0, \text{ falls } (i, j) \in E \\ t_{ij}^{(k-1)} \vee (t_{ik}^{(k-1)} \wedge t_{kj}^{(k-1)}) & \text{für } k > 0 \end{cases}$$

- ▶ Da zur Berechnung von  $t_{ij}^{(k)}$  nur  $t_{ij}^{(k-1)}$  – und keine ältere Werte  $t_{ij}^{(n)}$  mit  $n < k-1$  – gebraucht wird, kann die Berechnung **direkt** im Ausgabearray (in-place) erfolgen:  $R[i, j] = t_{ij}^{(\cdot)}$ .

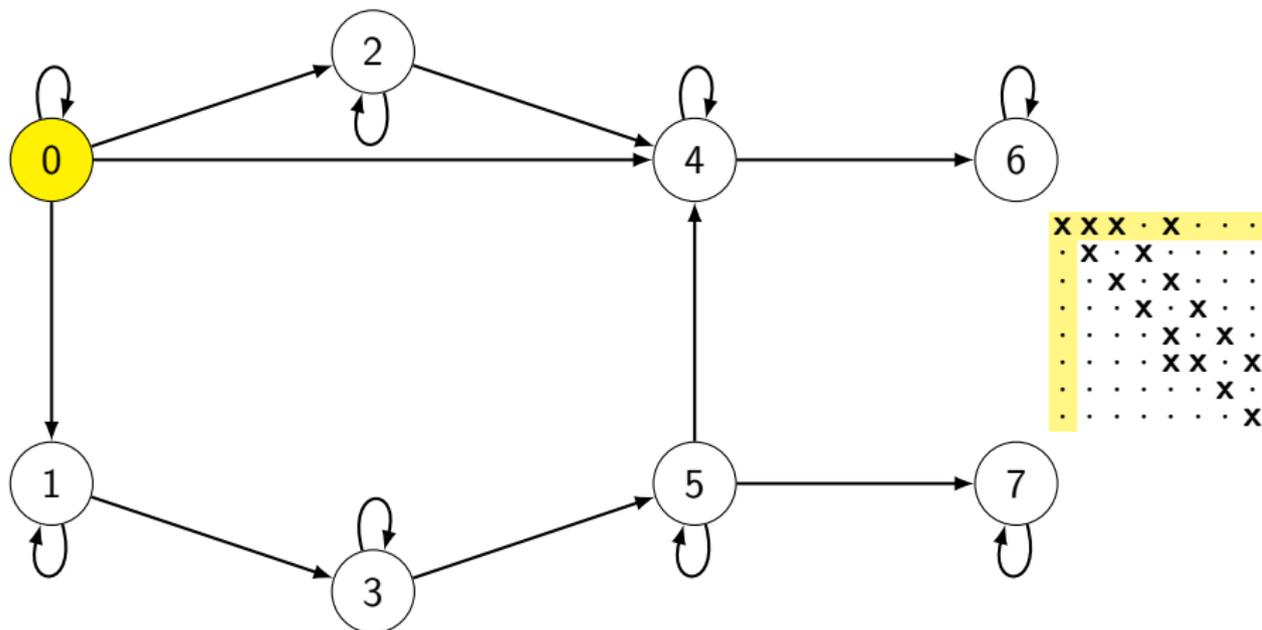
# Algorithmus von Warshall: Beispiel



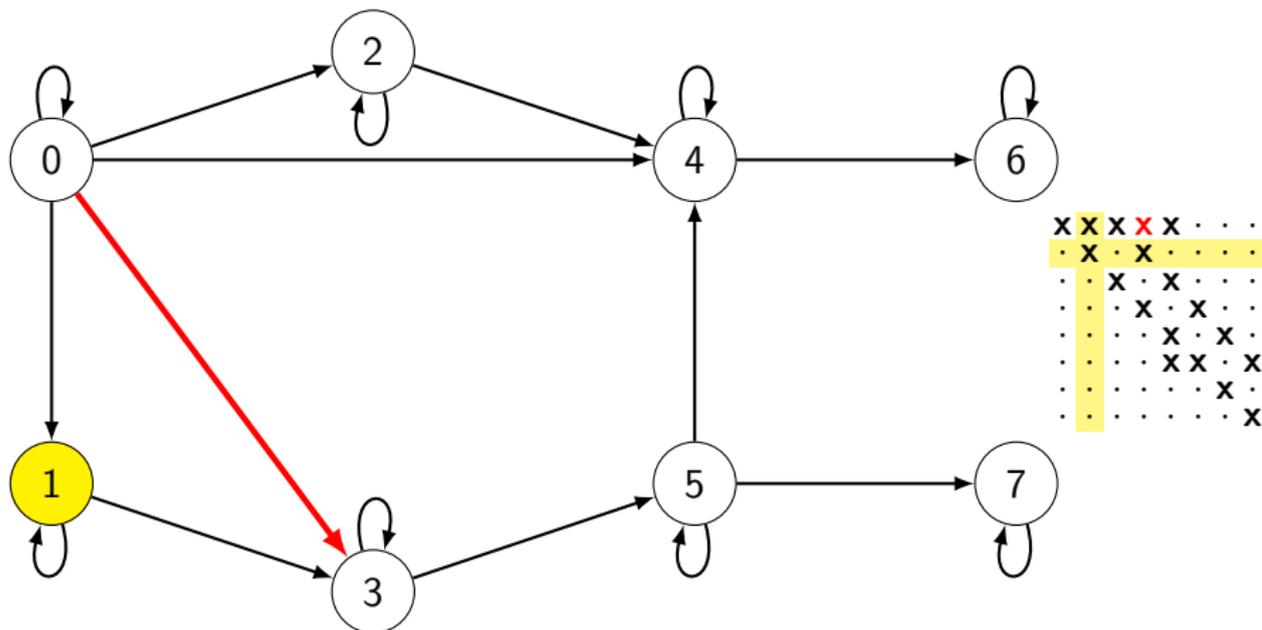
# Algorithmus von Warshall: Beispiel



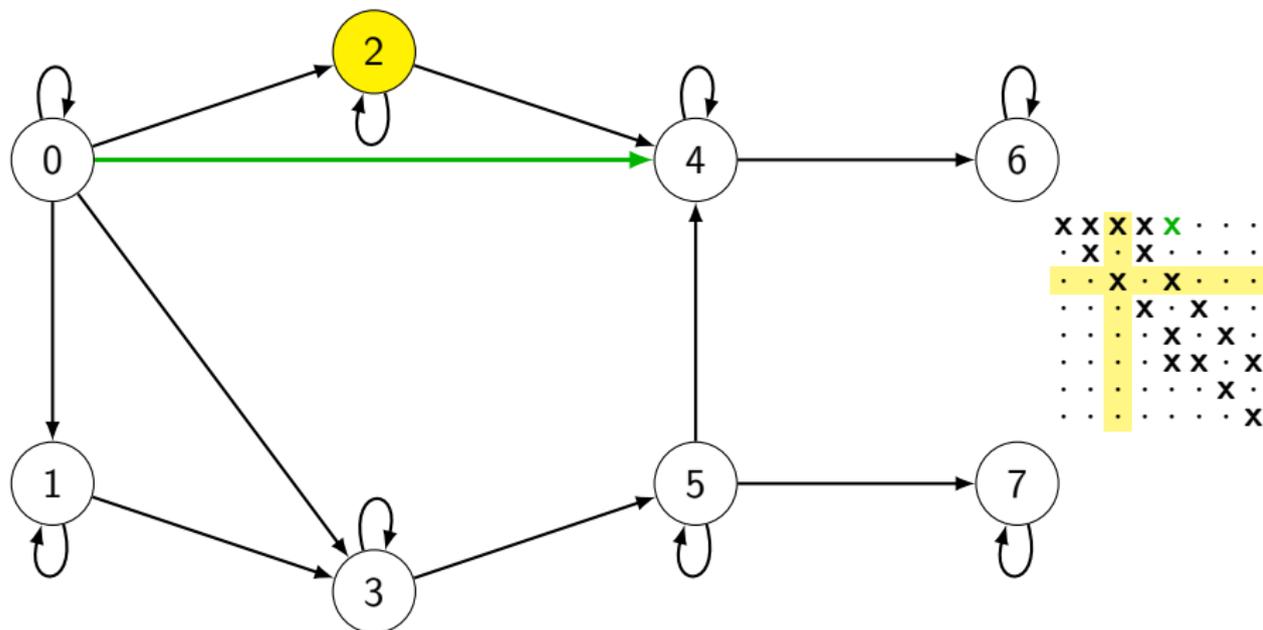
# Algorithmus von Warshall: Beispiel



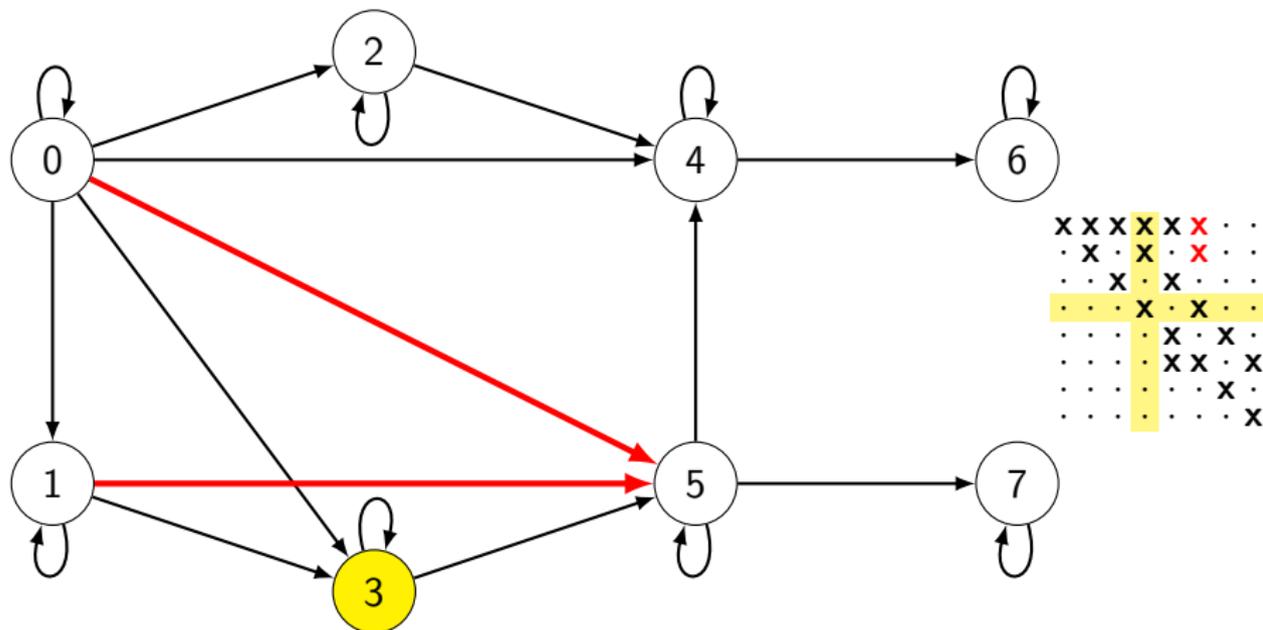
# Algorithmus von Warshall: Beispiel



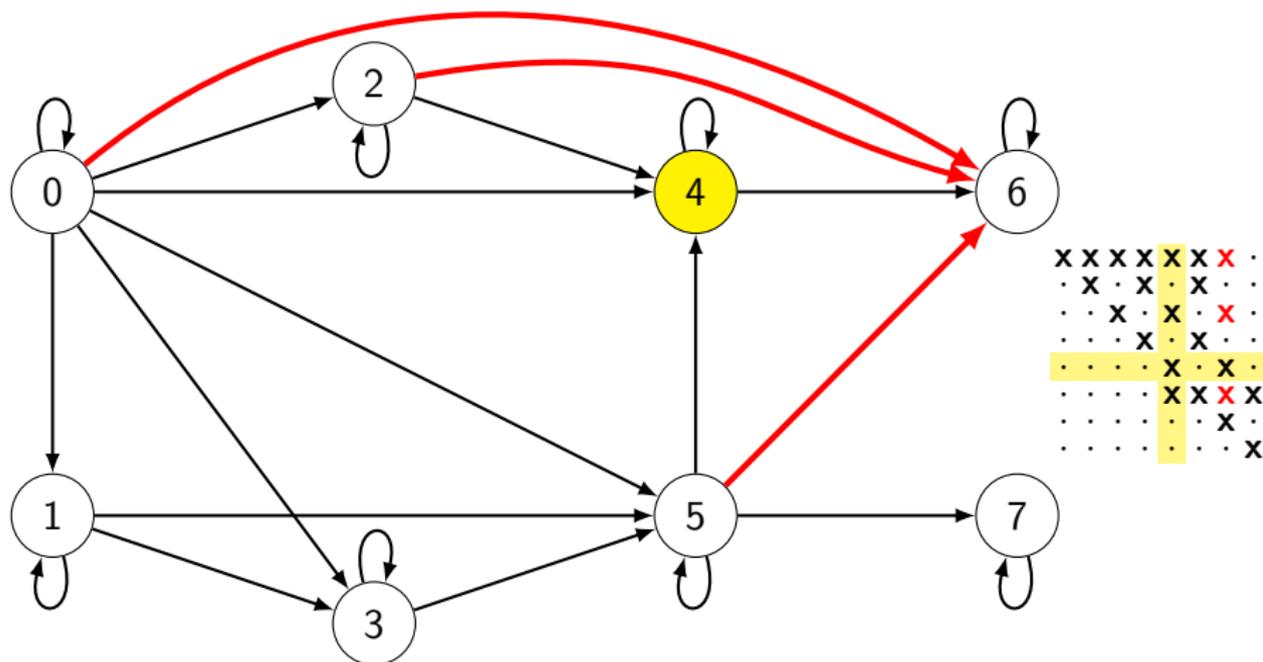
# Algorithmus von Warshall: Beispiel



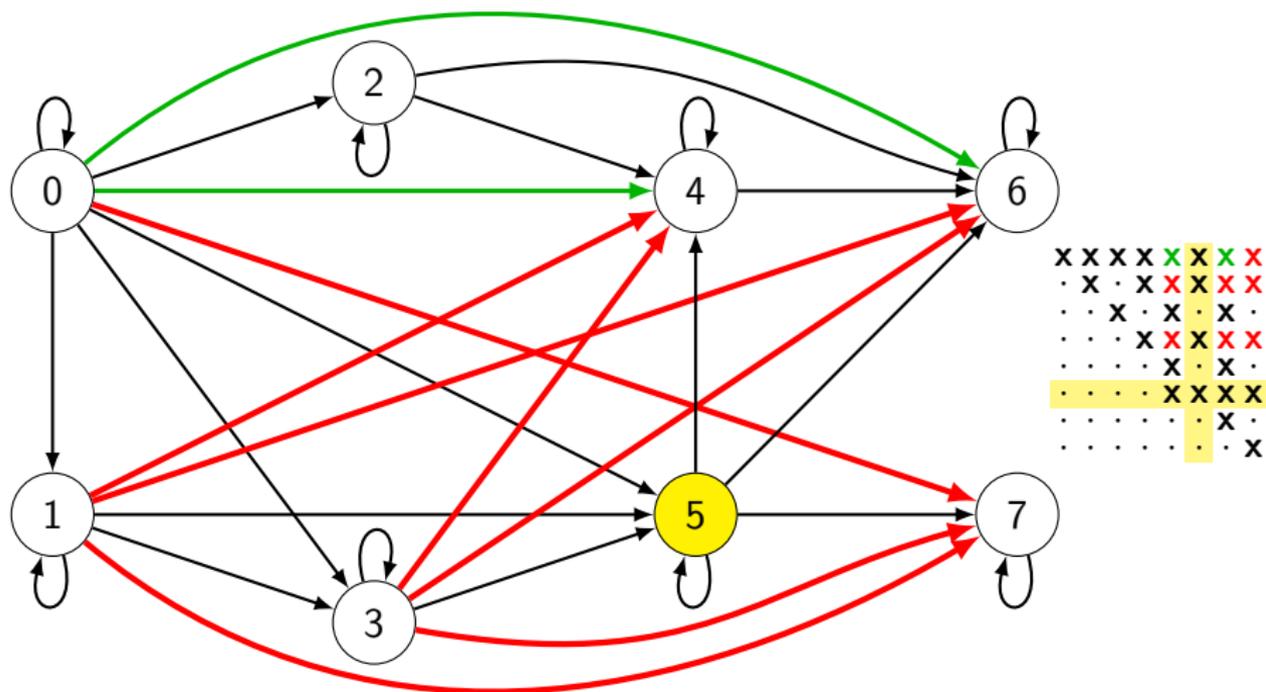
# Algorithmus von Warshall: Beispiel



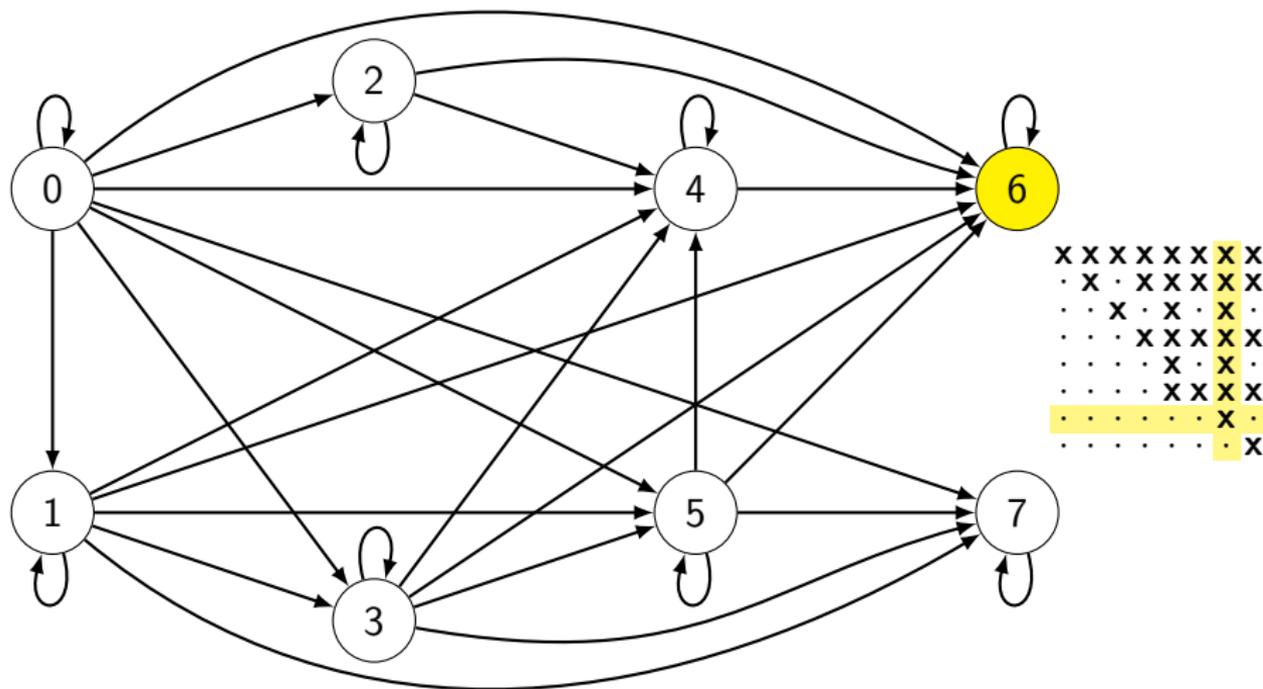
# Algorithmus von Warshall: Beispiel



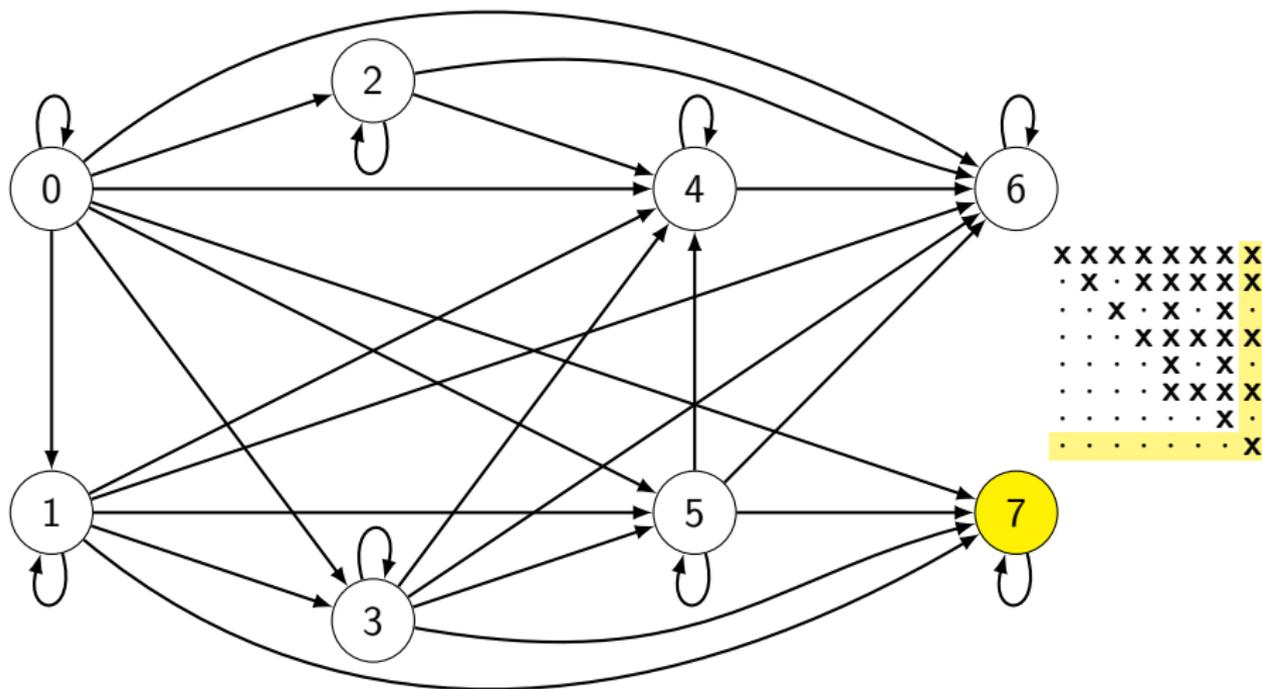
# Algorithmus von Warshall: Beispiel



# Algorithmus von Warshall: Beispiel

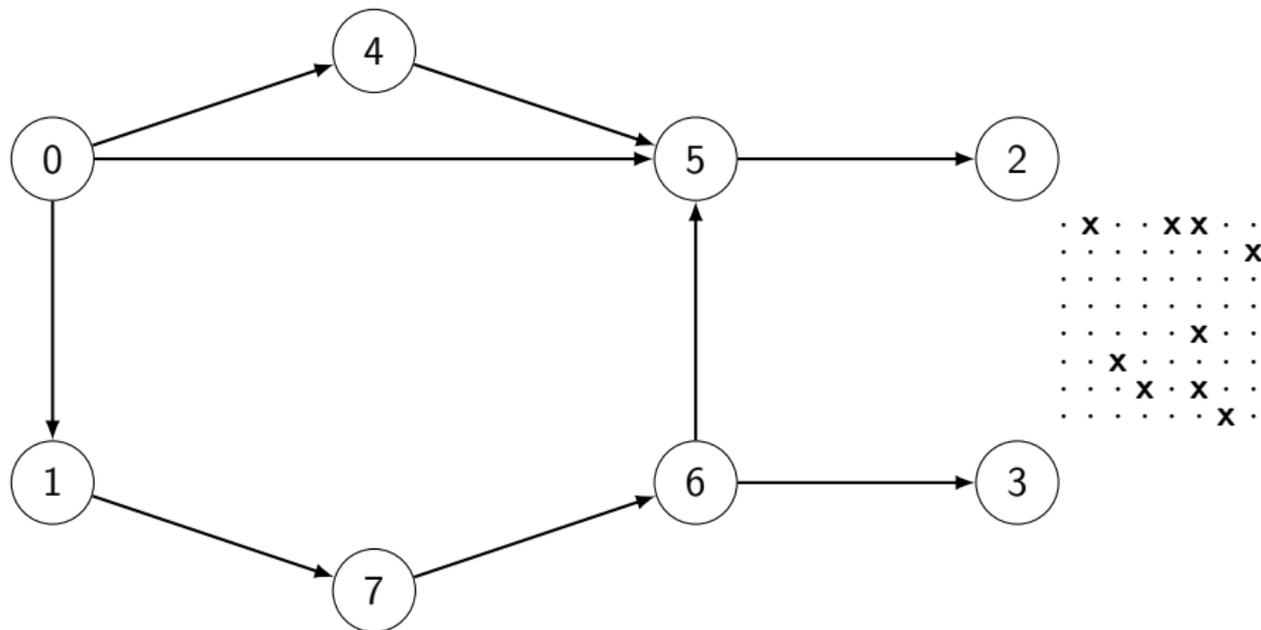


# Algorithmus von Warshall: Beispiel



# Algorithmus von Warshall: Beispiel

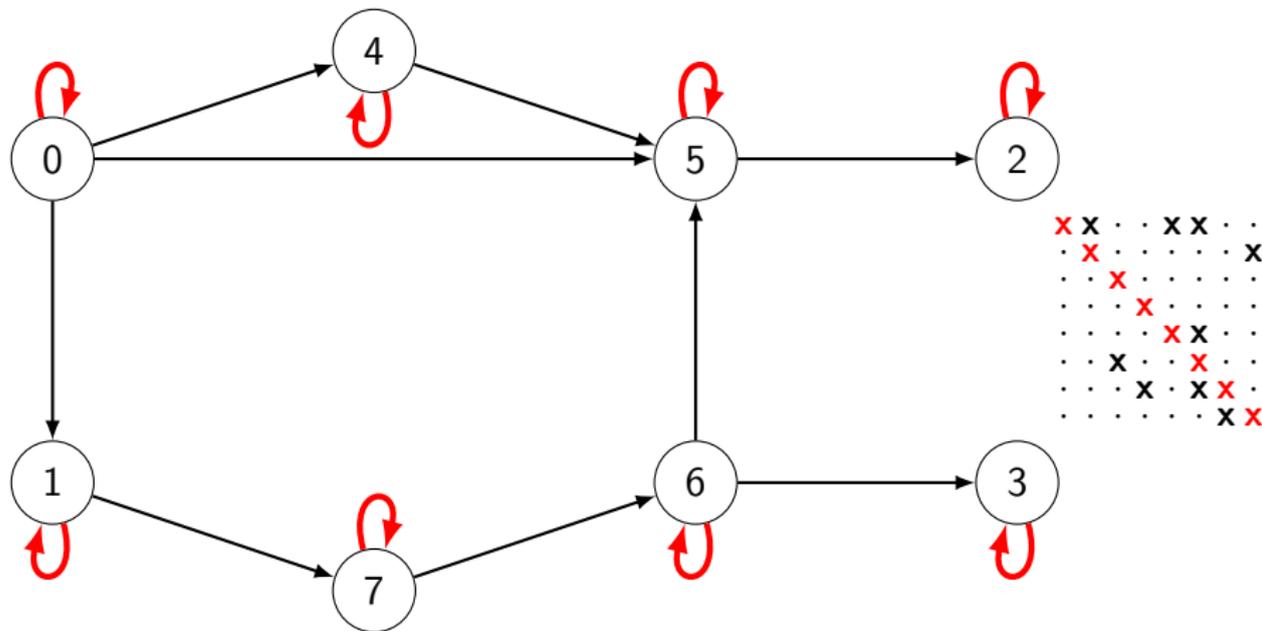
Andere Reihenfolge der Knoten:



Durch Permutierung der Knoten erhält man die gleiche Matrixdarstellung von  $R^*$  wie vorher.

# Algorithmus von Warshall: Beispiel

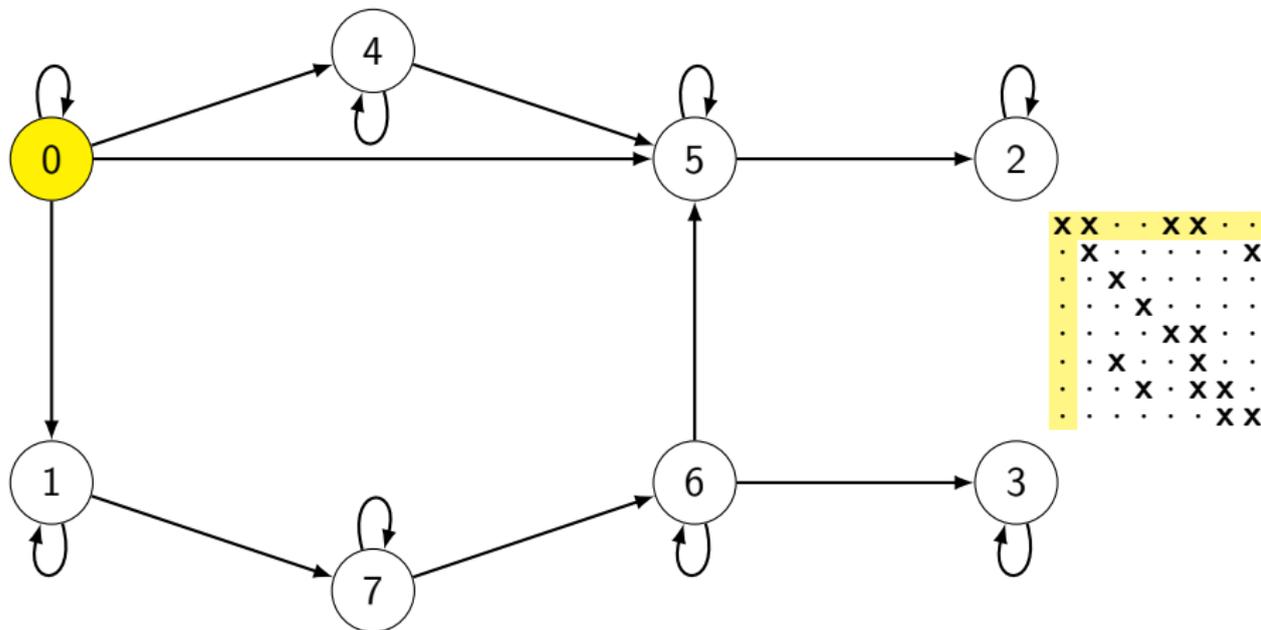
Andere Reihenfolge der Knoten:



Durch Permutierung der Knoten erhält man die gleiche Matrixdarstellung von  $R^*$  wie vorher.

# Algorithmus von Warshall: Beispiel

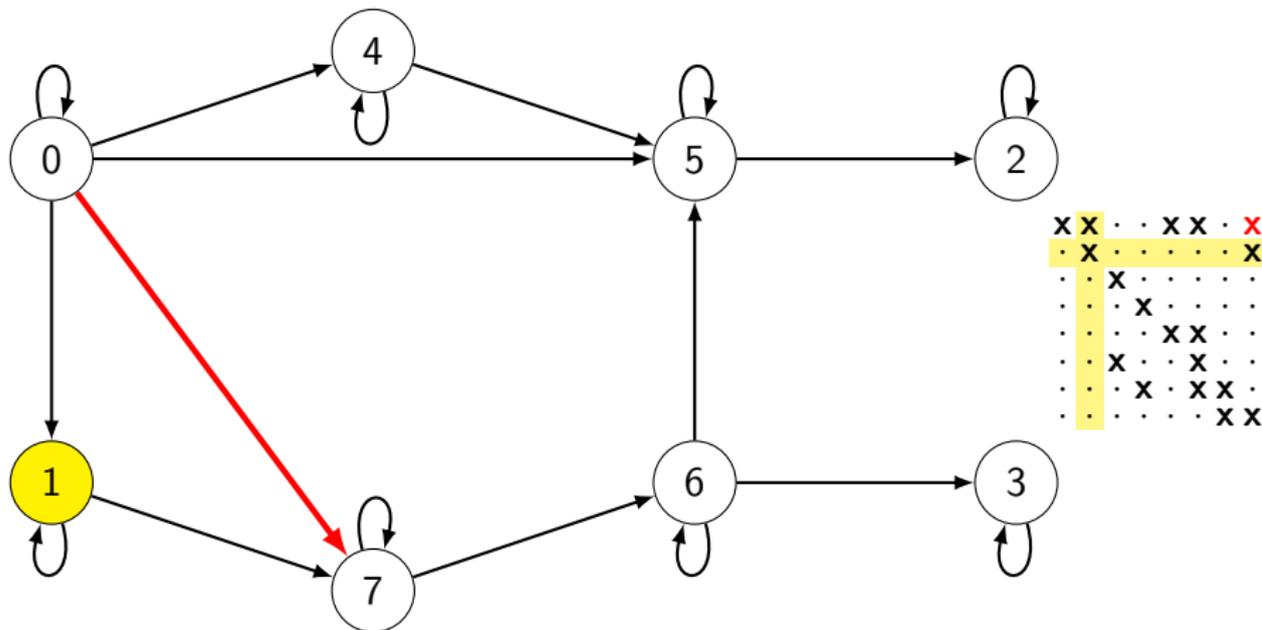
Andere Reihenfolge der Knoten:



Durch Permutierung der Knoten erhält man die gleiche Matrixdarstellung von  $R^*$  wie vorher.

# Algorithmus von Warshall: Beispiel

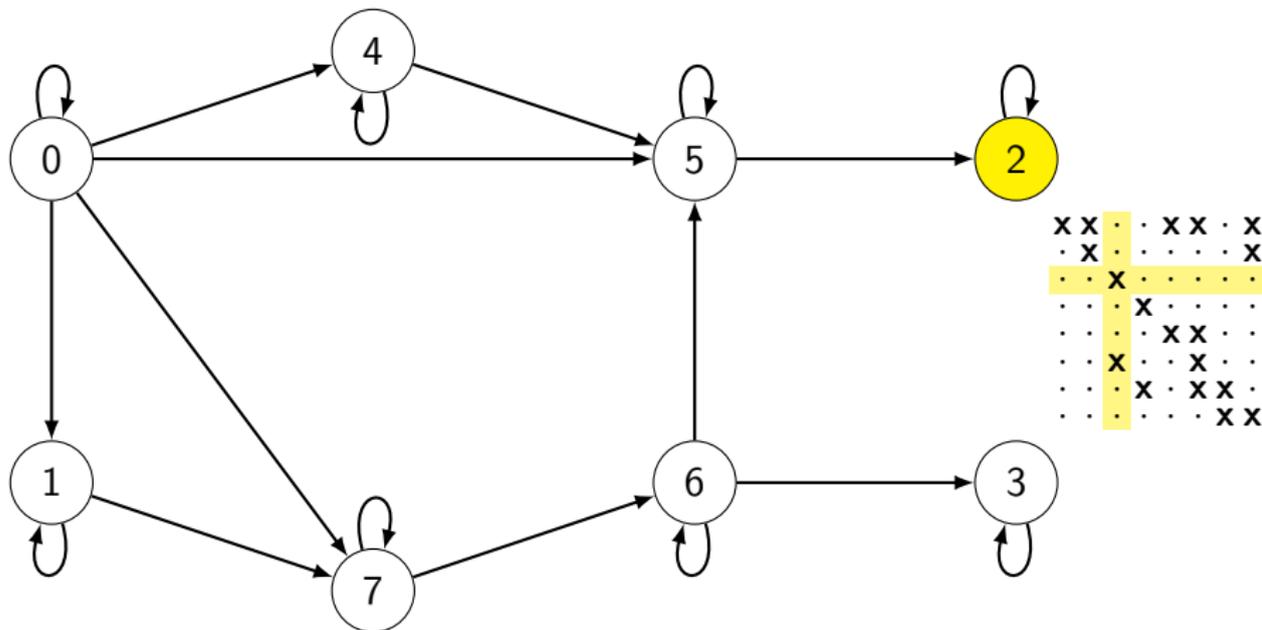
Andere Reihenfolge der Knoten:



Durch Permutierung der Knoten erhält man die gleiche Matrixdarstellung von  $R^*$  wie vorher.

# Algorithmus von Warshall: Beispiel

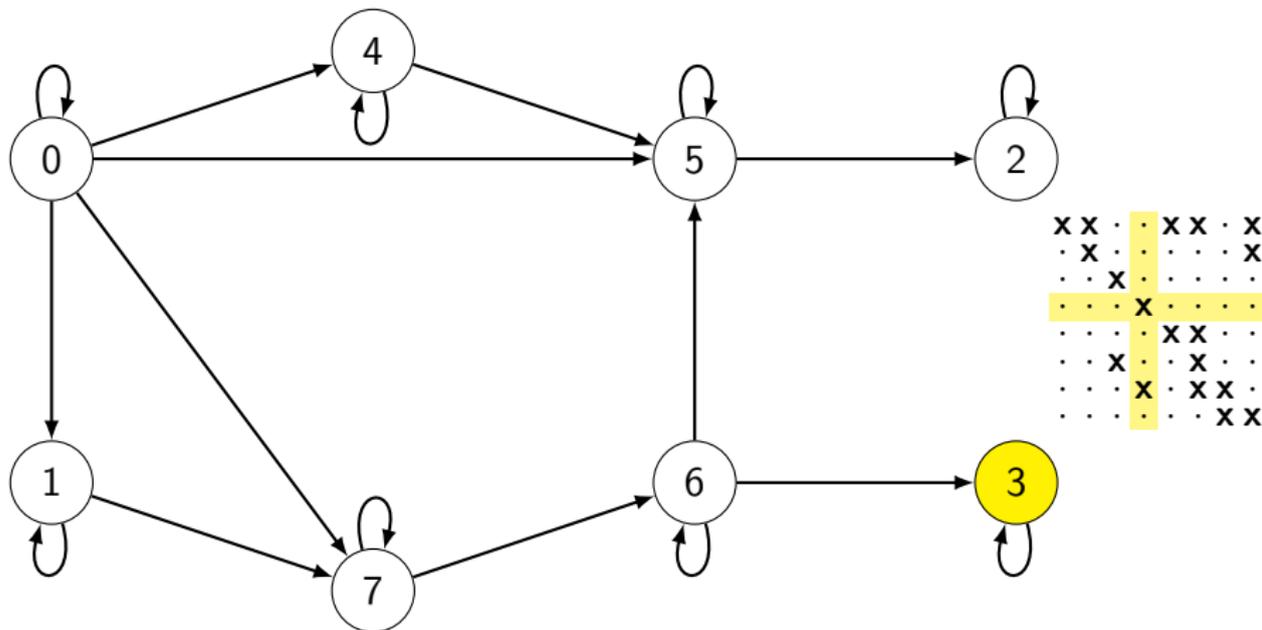
Andere Reihenfolge der Knoten:



Durch Permutierung der Knoten erhält man die gleiche Matrixdarstellung von  $R^*$  wie vorher.

# Algorithmus von Warshall: Beispiel

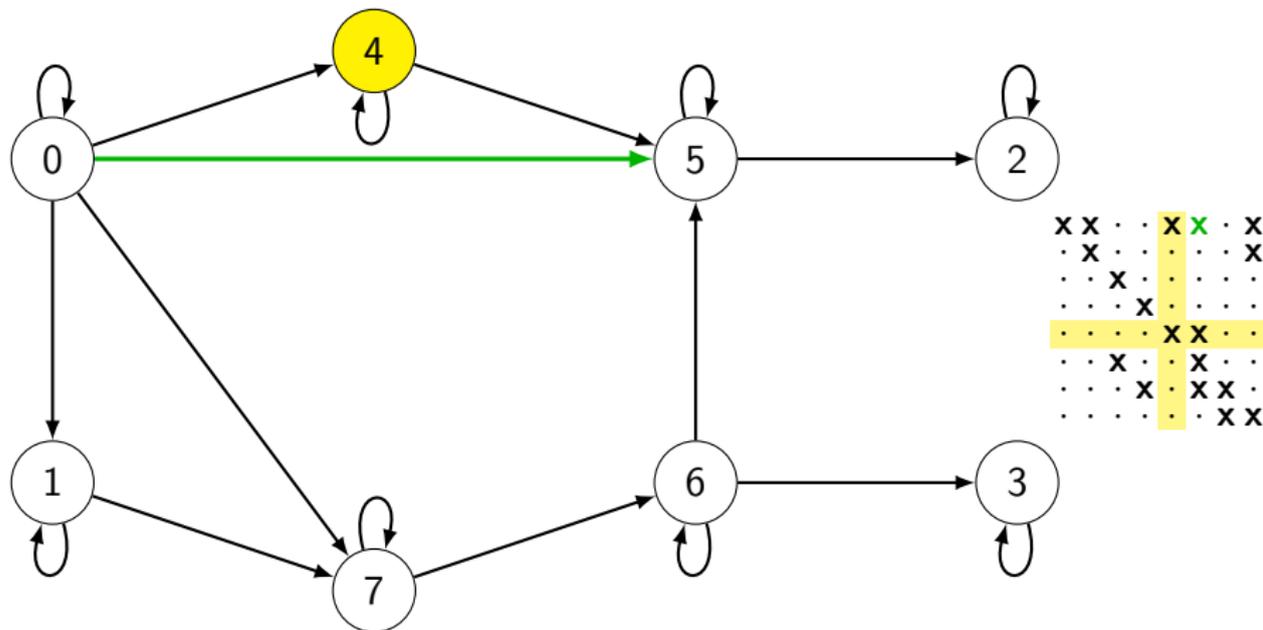
Andere Reihenfolge der Knoten:



Durch Permutierung der Knoten erhält man die gleiche Matrixdarstellung von  $R^*$  wie vorher.

# Algorithmus von Warshall: Beispiel

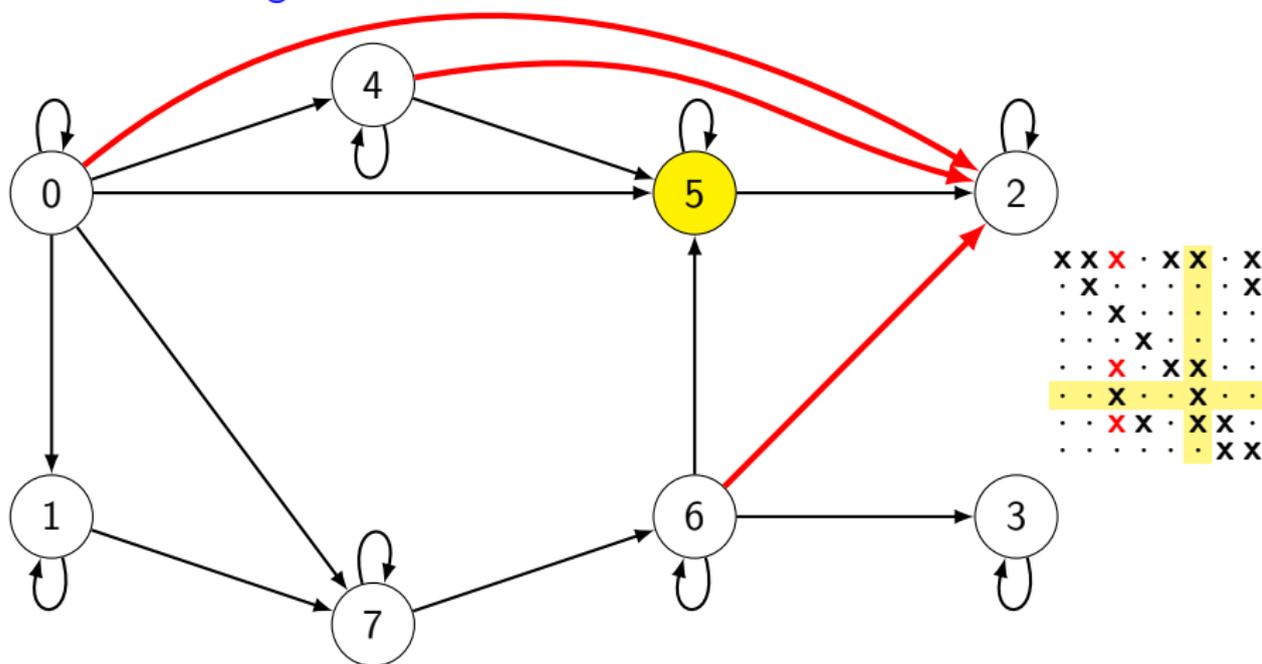
Andere Reihenfolge der Knoten:



Durch Permutierung der Knoten erhält man die gleiche Matrixdarstellung von  $R^*$  wie vorher.

# Algorithmus von Warshall: Beispiel

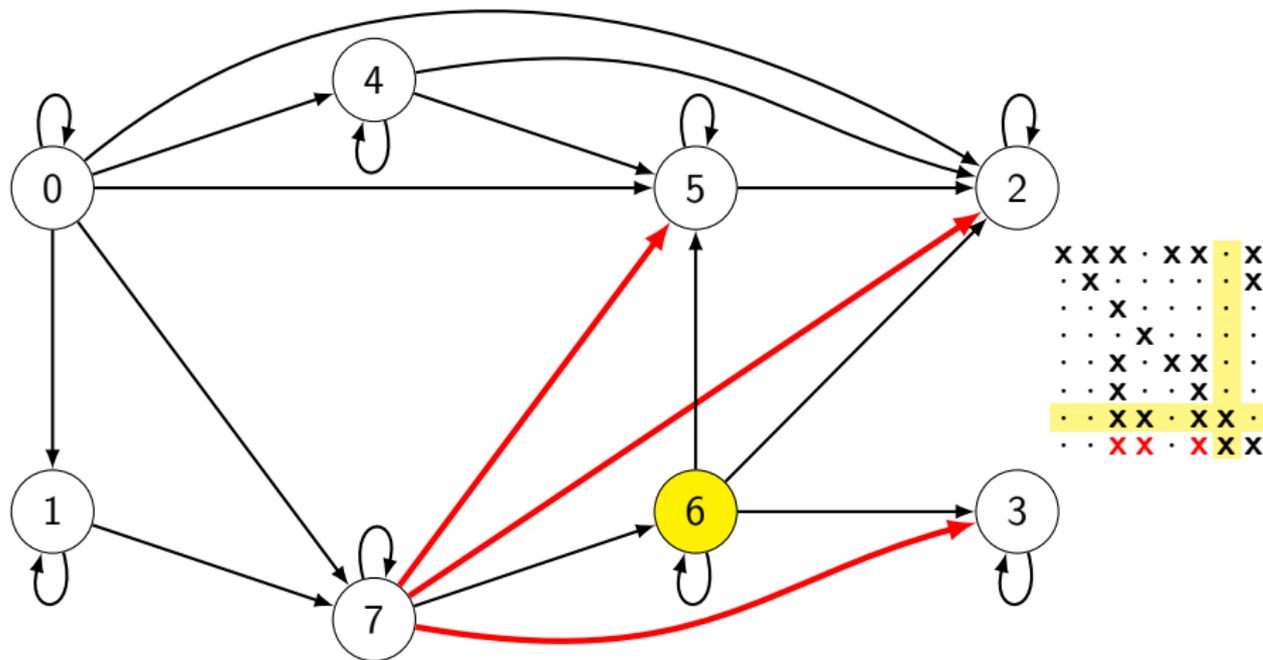
Andere Reihenfolge der Knoten:



Durch Permutierung der Knoten erhält man die gleiche Matrixdarstellung von  $R^*$  wie vorher.

# Algorithmus von Warshall: Beispiel

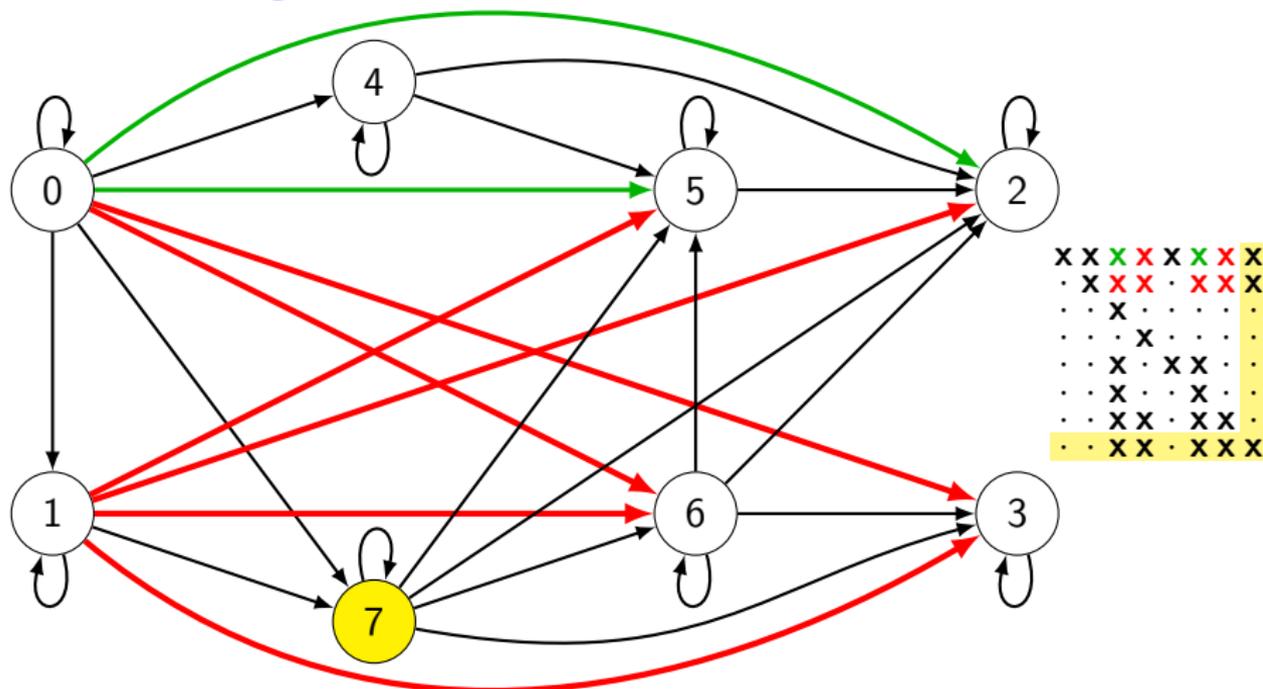
Andere Reihenfolge der Knoten:



Durch Permutierung der Knoten erhält man die gleiche Matrixdarstellung von  $R^*$  wie vorher.

# Algorithmus von Warshall: Beispiel

Andere Reihenfolge der Knoten:



Durch Permutierung der Knoten erhält man die gleiche Matrixdarstellung von  $R^*$  wie vorher.

# Algorithmus von Warshall

---

```
1 foreach ( $k \in V$ )
2   foreach (eingehende Kante  $(i, k) \in E$ )
3     foreach (ausgehende Kante  $(k, j) \in E$ )
4       Füge  $(i, j)$  zu  $E$  hinzu.
```

---

# Algorithmus von Warshall

---

```
1 foreach ( $k \in V$ )
2   foreach (eingehende Kante  $(i, k) \in E$ )
3     foreach (ausgehende Kante  $(k, j) \in E$ )
4       Füge  $(i, j)$  zu  $E$  hinzu.
```

---

---

```
1 void transClos(bool A[n][n], int n, bool &R[n][n]) {
2   for (int i = 0; i < n; i++)
3     for (int j = 0; j < n; j++)
4       R[i,j] = A[i,j]; // Kopiere A nach R
5
6   for (int i = 0; i < n; i++)
7     R[i,i] = true; // reflexive Hülle / reflexiver Abschluss
8
9   for (int k = 0; k < n; k++)
10    for (int i = 0; i < n; i++)
11      for (int j = 0; j < n; j++)
12        R[i,j] = R[i,j] || (R[i,k] && R[k,j]);
13 }
```

---

# Algorithmus von Warshall

---

```
1 foreach ( $k \in V$ )
2   foreach (eingehende Kante  $(i, k) \in E$ )
3     foreach (ausgehende Kante  $(k, j) \in E$ )
4       Füge  $(i, j)$  zu  $E$  hinzu.
```

---

---

```
1 void transClos(bool A[n][n], int n, bool &R[n][n]) {
2   for (int i = 0; i < n; i++)
3     for (int j = 0; j < n; j++)
4       R[i,j] = A[i,j]; // Kopiere A nach R
5
6   for (int i = 0; i < n; i++)
7     R[i,i] = true; // reflexive Hülle / reflexiver Abschluss
8
9   for (int k = 0; k < n; k++)
10    for (int i = 0; i < n; i++)
11      for (int j = 0; j < n; j++)
12        R[i,j] = R[i,j] || (R[i,k] && R[k,j]);
13 }
```

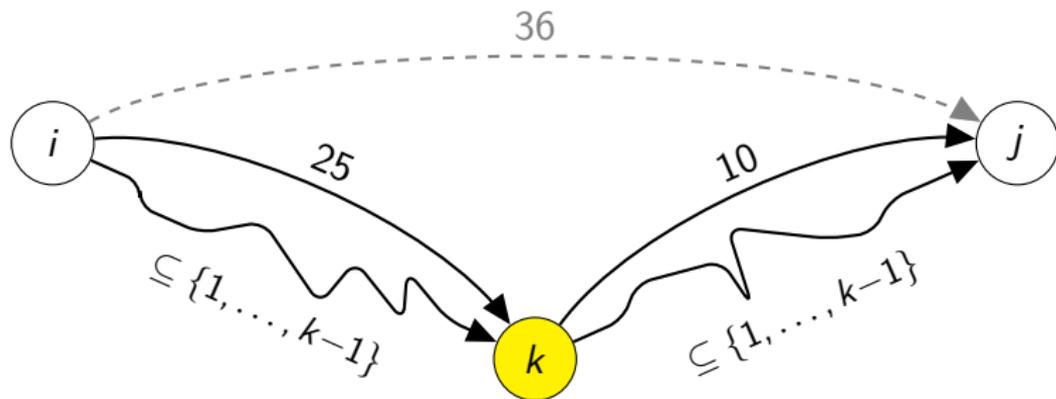
---

- Zeitkomplexität:  $\Theta(|V|^3)$ , Platzkomplexität:  $\Theta(|V|^2)$ .

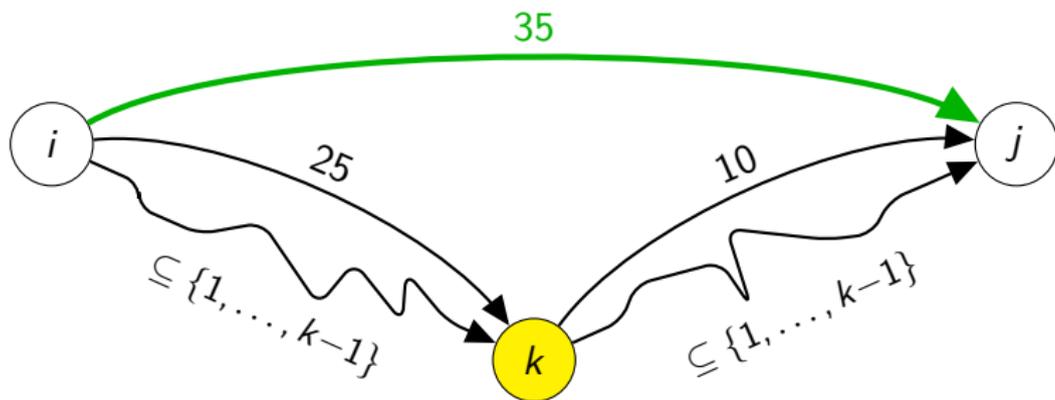
# Übersicht

- 1 Kürzeste Pfade
- 2 Single-Source Shortest Path
  - Bellman-Ford
  - Dijkstra
- 3 All-Pairs Shortest Paths
  - Transitive Hülle
  - Algorithmus von Warshall
  - Der Algorithmus von Floyd

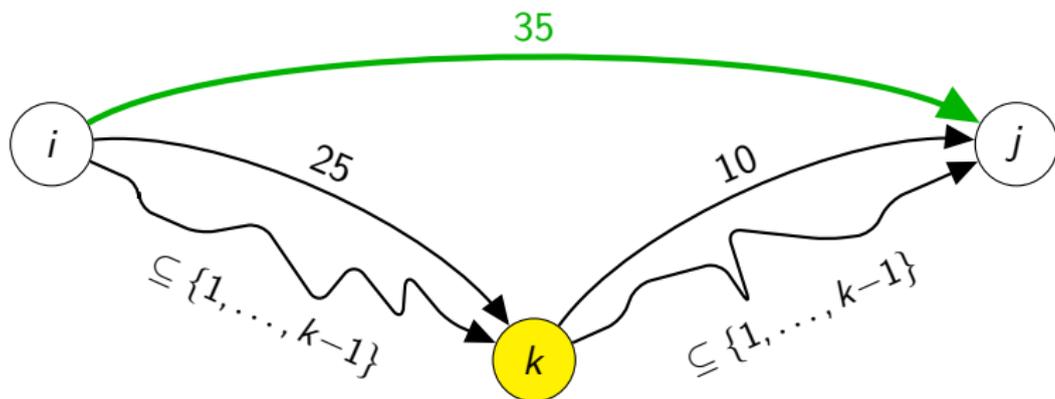
# Der Algorithmus von Floyd: Idee



# Der Algorithmus von Floyd: Idee

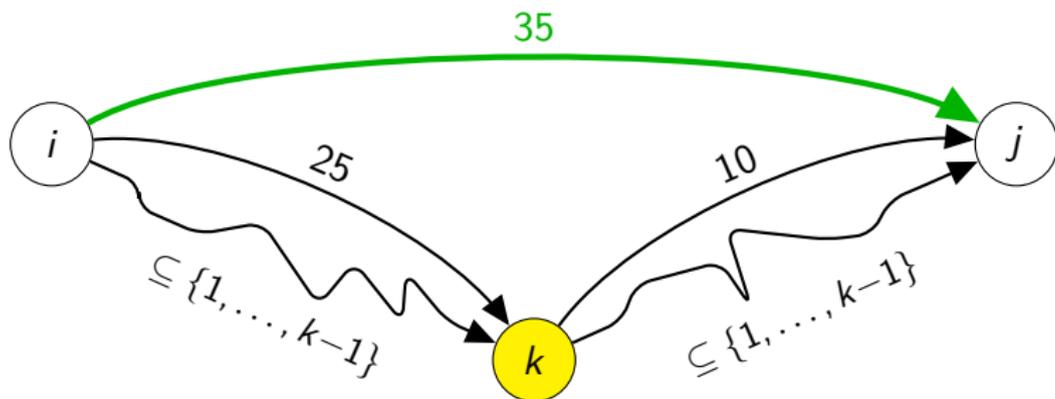


# Der Algorithmus von Floyd: Idee



- ▶ Vorgehen wie bei Warshall, jedoch mit folgender Rekursionsgleichung:

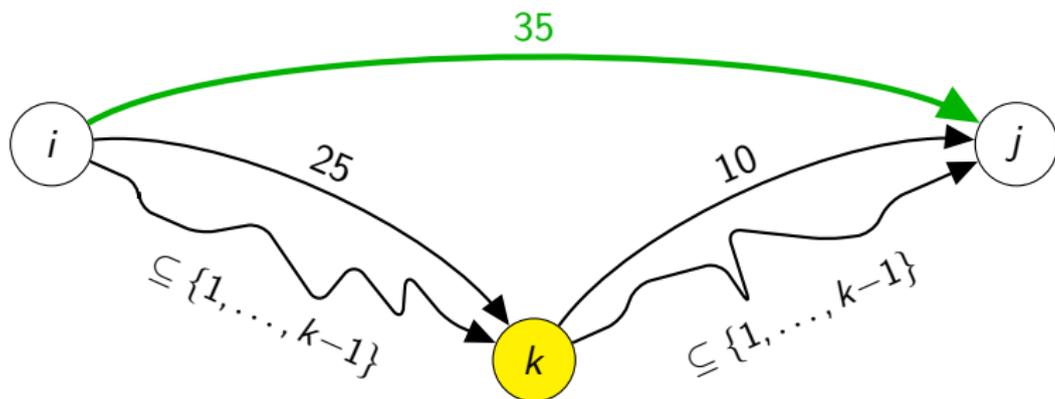
# Der Algorithmus von Floyd: Idee



- ▶ Vorgehen wie bei Warshall, jedoch mit folgender Rekursionsgleichung:

$$d_{ij}^{(k)} = \begin{cases} W(i, j) & \text{für } k = 0 \\ \min \left( d_{ij}^{(k-1)}, d_{ik}^{(k-1)} + d_{kj}^{(k-1)} \right) & \text{für } k > 0 \end{cases}$$

# Der Algorithmus von Floyd: Idee

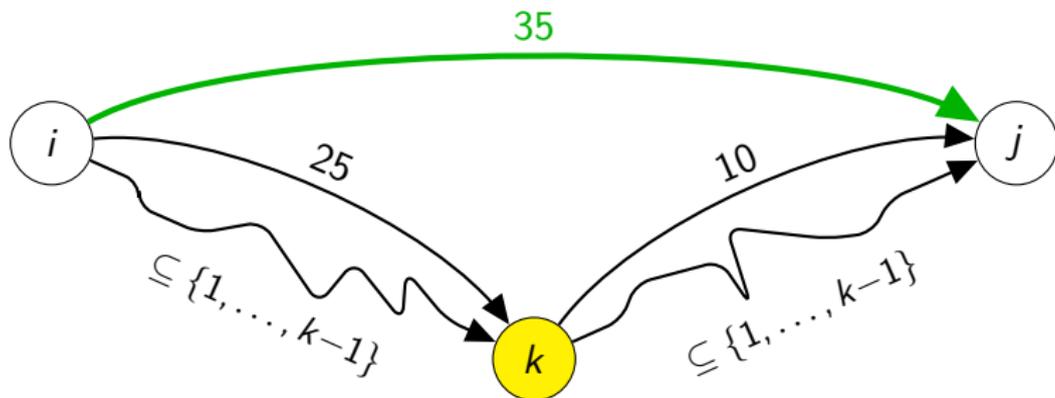


- ▶ Vorgehen wie bei Warshall, jedoch mit folgender Rekursionsgleichung:

$$d_{ij}^{(k)} = \begin{cases} W(i, j) & \text{für } k = 0 \\ \min \left( d_{ij}^{(k-1)}, d_{ik}^{(k-1)} + d_{kj}^{(k-1)} \right) & \text{für } k > 0 \end{cases}$$

(statt:  $t_{ij}^{(k-1)} \vee \left( t_{ik}^{(k-1)} \wedge t_{kj}^{(k-1)} \right)$ )

# Der Algorithmus von Floyd: Idee



- ▶ Vorgehen wie bei Warshall, jedoch mit folgender Rekursionsgleichung:

$$d_{ij}^{(k)} = \begin{cases} W(i, j) & \text{für } k = 0 \\ \min \left( d_{ij}^{(k-1)}, d_{ik}^{(k-1)} + d_{kj}^{(k-1)} \right) & \text{für } k > 0 \end{cases}$$

(statt:  $t_{ij}^{(k-1)} \vee (t_{ik}^{(k-1)} \wedge t_{kj}^{(k-1)})$ )

- ▶ Auch hier arbeiten wir direkt im Ausgabearray:  $D[i, j] = d_{ij}^{(\cdot)}$ .

# Der Algorithmus von Floyd: Beispiel

<https://www.cs.usfca.edu/~galles/visualization/Floyd.html>

# Der Algorithmus von Floyd: Implementierung

```
1 void floydSP(double W[n][n], int n, double &D[n][n]) {
2   for (int i = 0; i < n; i++)
3     for (int j = 0; j < n; j++)
4       D[i,j] = W[i,j]; // Kopiere W nach D
5
6   for (int i = 0; i < n; i++) // reflexive Hülle
7     D[i,i] = 0;
8
9   for (int k = 0; k < n; k++)
10    for (int i = 0; i < n; i++)
11      for (int j = 0; j < n; j++)
12        D[i,j] = min(D[i,j], D[i,k] + D[k,j]);
13 }
```

# Der Algorithmus von Floyd: Implementierung

```
1 void floydSP(double W[n][n], int n, double &D[n][n]) {
2   for (int i = 0; i < n; i++)
3     for (int j = 0; j < n; j++)
4       D[i,j] = W[i,j]; // Kopiere W nach D
5
6   for (int i = 0; i < n; i++) // reflexive Hülle
7     D[i,i] = 0;
8
9   for (int k = 0; k < n; k++)
10    for (int i = 0; i < n; i++)
11      for (int j = 0; j < n; j++)
12        D[i,j] = min(D[i,j], D[i,k] + D[k,j]);
13 }
```

- ▶ Zeitkomplexität:  $\Theta(|V|^3)$ , Platzkomplexität:  $\Theta(|V|^2)$ .

# Der Algorithmus von Floyd: Implementierung

```
1 void floydSP(double W[n][n], int n, double &D[n][n]) {
2   for (int i = 0; i < n; i++)
3     for (int j = 0; j < n; j++)
4       D[i,j] = W[i,j]; // Kopiere W nach D
5
6   for (int i = 0; i < n; i++) // reflexive Hülle
7     D[i,i] = 0;
8
9   for (int k = 0; k < n; k++)
10    for (int i = 0; i < n; i++)
11      for (int j = 0; j < n; j++)
12        D[i,j] = min(D[i,j], D[i,k] + D[k,j]);
13 }
```

- ▶ Zeitkomplexität:  $\Theta(|V|^3)$ , Platzkomplexität:  $\Theta(|V|^2)$ .
- ▶ Hier nicht behandelt: Der Algorithmus kann auch mit negativen Zyklen umgehen.

# Der Algorithmus von Floyd: Erweiterung

- ▶ Der Algorithmus lässt sich einfach auf die Rückgabe von Pfaden erweitern (z. B. Routingtabellen).

# Der Algorithmus von Floyd: Erweiterung

- ▶ Der Algorithmus lässt sich einfach auf die Rückgabe von Pfaden erweitern (z. B. Routingtabellen).
- ▶ Dazu speichere zu jedem Paar  $i, j$  jeweils den letzten Zwischenknoten des kürzesten Pfades in  $\pi_{ij}$  (den Vorgänger von  $j$ ).

# Der Algorithmus von Floyd: Erweiterung

- ▶ Der Algorithmus lässt sich einfach auf die Rückgabe von Pfaden erweitern (z. B. Routingtabellen).
- ▶ Dazu speichere zu jedem Paar  $i, j$  jeweils den letzten Zwischenknoten des kürzesten Pfades in  $\pi_{ij}$  (den Vorgänger von  $j$ ).

$$\pi_{ij}^{(k)} = \begin{cases} i & \text{für } k = 0, i \neq j, \text{ falls } W(i, j) \neq +\text{inf} \\ \end{cases}$$

# Der Algorithmus von Floyd: Erweiterung

- ▶ Der Algorithmus lässt sich einfach auf die Rückgabe von Pfaden erweitern (z. B. Routingtabellen).
- ▶ Dazu speichere zu jedem Paar  $i, j$  jeweils den letzten Zwischenknoten des kürzesten Pfades in  $\pi_{ij}$  (den Vorgänger von  $j$ ).

$$\pi_{ij}^{(k)} = \begin{cases} i & \text{für } k = 0, i \neq j, \text{ falls } W(i, j) \neq +\text{inf} \\ \text{null} & \text{für } k = 0, \text{ sonst} \end{cases}$$

# Der Algorithmus von Floyd: Erweiterung

- ▶ Der Algorithmus lässt sich einfach auf die Rückgabe von Pfaden erweitern (z. B. Routingtabellen).
- ▶ Dazu speichere zu jedem Paar  $i, j$  jeweils den letzten Zwischenknoten des kürzesten Pfades in  $\pi_{ij}$  (den Vorgänger von  $j$ ).

$$\pi_{ij}^{(k)} = \begin{cases} i & \text{für } k = 0, i \neq j, \text{ falls } W(i, j) \neq +\text{inf} \\ \text{null} & \text{für } k = 0, \text{ sonst} \\ \pi_{kj}^{(k-1)} & \text{für } k > 0, \text{ falls } d_{ij}^{(k-1)} > d_{ik}^{(k-1)} + d_{kj}^{(k-1)} \end{cases}$$

# Der Algorithmus von Floyd: Erweiterung

- ▶ Der Algorithmus lässt sich einfach auf die Rückgabe von Pfaden erweitern (z. B. Routingtabellen).
- ▶ Dazu speichere zu jedem Paar  $i, j$  jeweils den letzten Zwischenknoten des kürzesten Pfades in  $\pi_{ij}$  (den Vorgänger von  $j$ ).

$$\pi_{ij}^{(k)} = \begin{cases} i & \text{für } k = 0, i \neq j, \text{ falls } W(i, j) \neq +\text{inf} \\ \text{null} & \text{für } k = 0, \text{ sonst} \\ \pi_{kj}^{(k-1)} & \text{für } k > 0, \text{ falls } d_{ij}^{(k-1)} > d_{ik}^{(k-1)} + d_{kj}^{(k-1)} \\ \pi_{ij}^{(k-1)} & \text{sonst} \end{cases}$$

# Nächste Vorlesung

## Nächste Vorlesung

Freitag 29. Juni, 13:15 (Hörsaal H01). Bis dann!