Datenstrukturen und Algorithmen

Vorlesung 14+15: Elementare Graphenalgorithmen (K22,K24.2)

Joost-Pieter Katoen

Lehrstuhl für Informatik 2
Software Modeling and Verification Group

https://moves.rwth-aachen.de/teaching/ss-18/dsal/

15.+18. Juni 2018

RWTH AACHEN UNIVERSITY

Übersicht

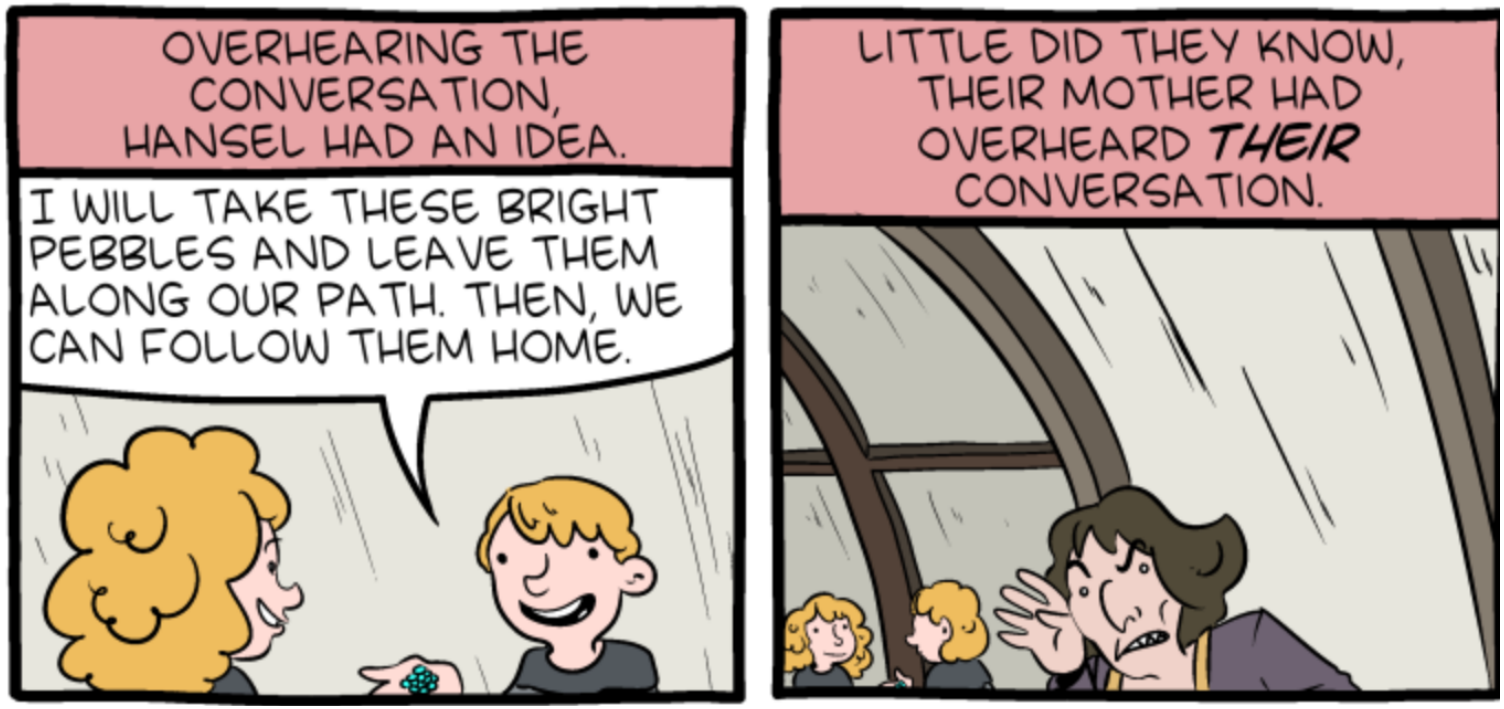
1. Graphen
   - Terminologie
   - Repräsentation von Graphen
2. Graphendurchlauf
   - Breitensuche
   - Tiefensuche

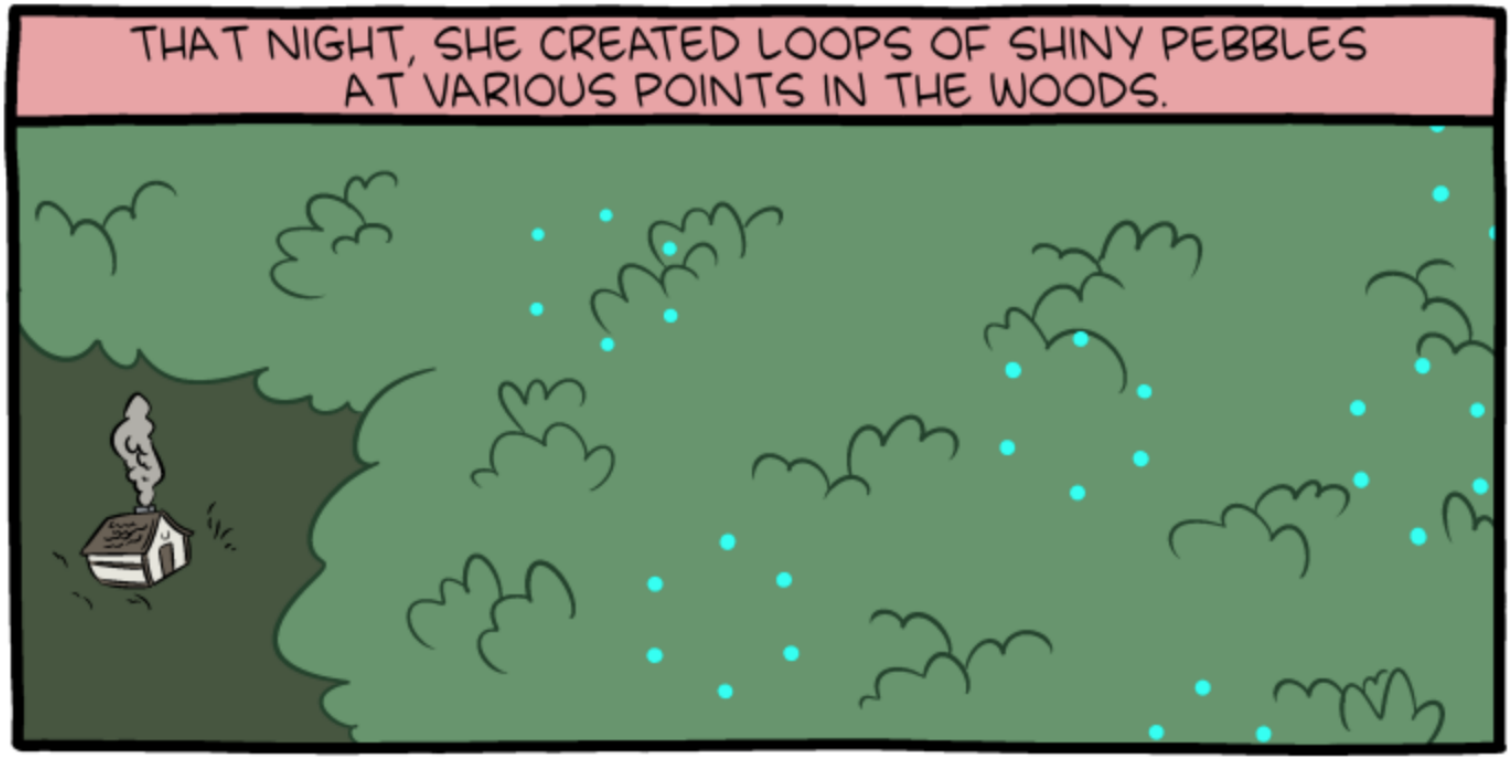
↑ Freitag

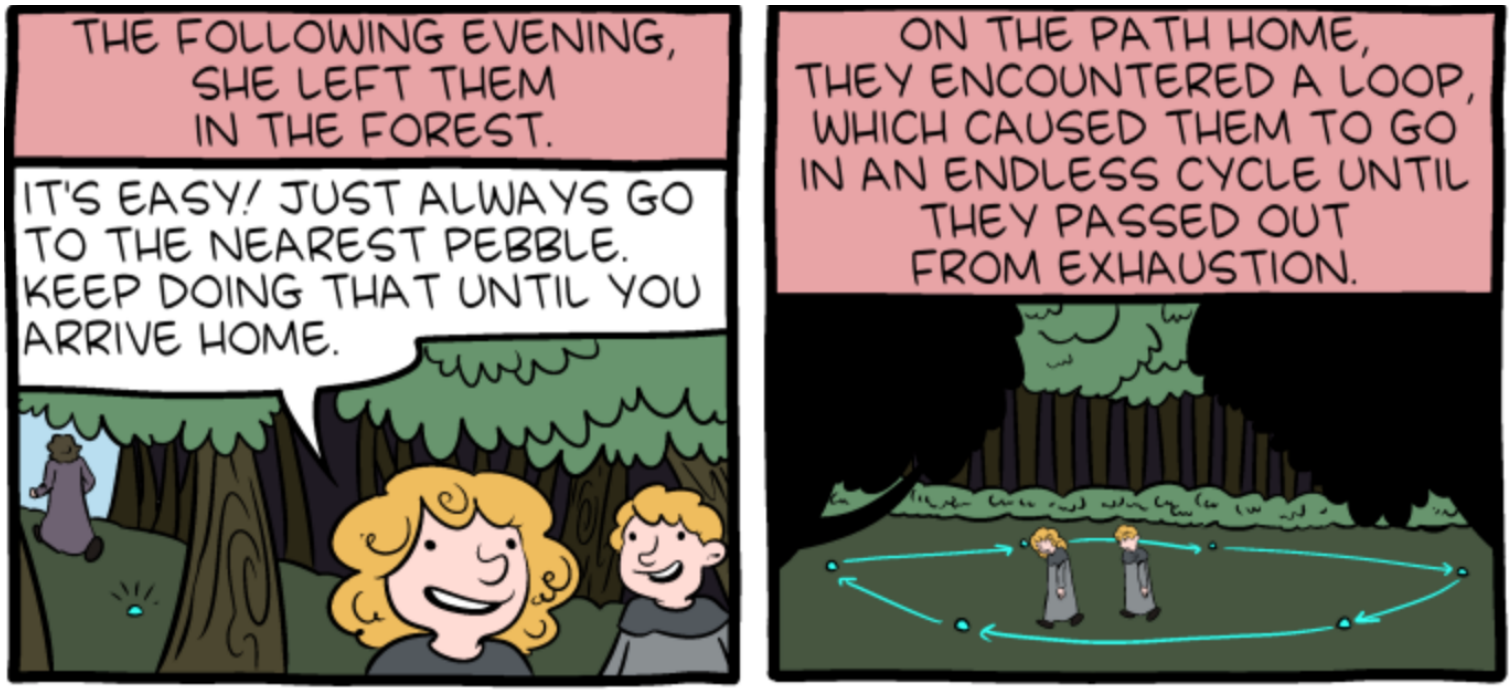
3. Anwendungen der Tiefensuche
   - Erreichbarkeitsanalyse
   - CCs in ungerichteten Graphen
   - SCCs in gerichteten Graphen
   - Topologische Sortierung in gerichteten azyklischen Graphen
   - Kritische-Pfad-Analyse in gewichteten gerichteten azyklischen Graphen

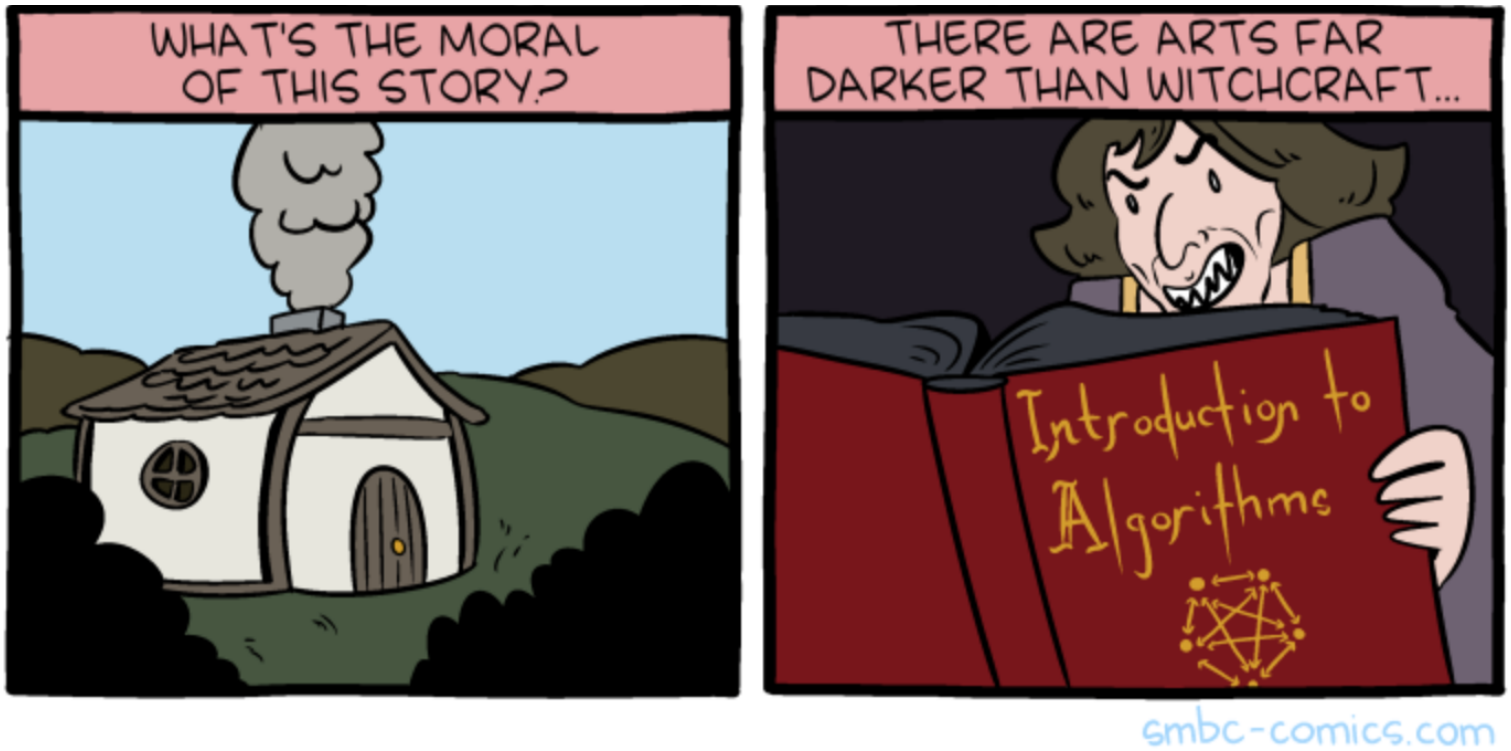
↓ Montag 18.06


IN THE YEAR OF A GREAT FAMINE, HANSEL AND GRETEL'S MOTHER DECIDED TO LEAVE THEM IN THE WOODS TO FEND FOR THEMSELVES


OVERHEARING THE CONVERSATION, HANSEL HAD AN IDEA.
I WILL TAKE THESE BRIGHT PEBBLES AND LEAVE THEM ALONG OUR PATH. THEN, WE CAN FOLLOW THEM HOME.
LITTLE DID THEY KNOW, THEIR MOTHER HAD OVERHEARD THEIR CONVERSATION.

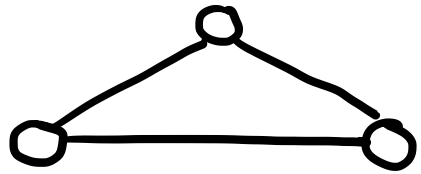

THAT NIGHT, SHE CREATED LOOPS OF SHINY PEBBLES
AT VARIOUS POINTS IN THE WOODS.


THE FOLLOWING EVENING, SHE LEFT THEM IN THE FOREST.
IT'S EASY! JUST ALWAYS GO TO THE NEAREST PEBBLE. KEEP DOING THAT UNTIL YOU ARRIVE HOME.
ON THE PATH HOME, THEY ENCOUNTERED A LOOP, WHICH CAUSED THEM TO GO IN AN ENDLESS CYCLE UNTIL THEY PASSED OUT FROM EXHAUSTION.


WHAT'S THE MORAL OF THIS STORY?
THERE ARE ARTS FAR DARKER THAN WITCHCRAFT...
Introduction to Algorithms
smbc-comics.com

Übersicht

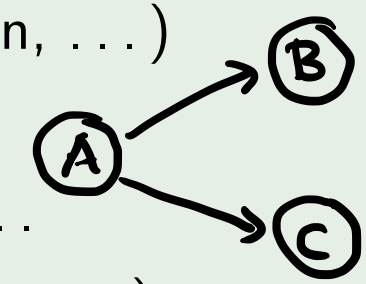
Die Bedeutung von Graphen



Graphen werden in vielen (Informatik-)Anwendungen verwendet:

Beispiele

- (Computer-)Netzwerke
- Webseiten und ihre Vernetzung mittels Links
- Darstellung von topologischen Informationen (Karten, . . .)
- Darstellung von elektronischen Schaltungen
- Vorranggraphen (precedence graph), Ablaufpläne, . . .
- Semantische Netze (z. B. Entity-Relationship-Diagramme)



Wir werden uns auf fundamentale Graphalgorithmen konzentrieren.

Gerichteter Graph

endliche

Gerichteter Graph

Ein gerichteter Graph (auch: digraph) G ist ein Paar (V, E) mit

- einer Menge V von Knoten (vertices) und
- einer Menge $E \subseteq \{ (u, v) \mid u, v \in V \}$ von Kanten (edges).

$(u,v) \in E$

Gerichteter Graph

Gerichteter Graph

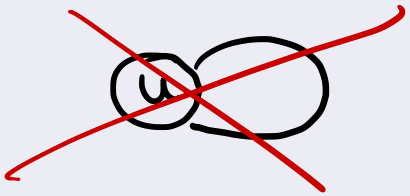
Ein gerichteter Graph (auch: digraph) G ist ein Paar (V, E) mit

- einer Menge V von Knoten (vertices) und
- einer Menge $E \subseteq \{ (u, v) \mid u, v \in V \}$ von Kanten (edges).

Ungerichteter Graph

Ein ungerichteter Graph G ist ein Paar (V, E) mit

- einer Menge V von Knoten (vertices) und
- einer Menge $E \subseteq \{\{u, v\} \mid u, v \in V, u \neq v\}$ von Kanten (edges).



Auch für ungerichtete Kanten verwenden wir die Notation (u, v).

Gerichteter Graph

Gerichteter Graph

Ein gerichteter Graph (auch: digraph) G ist ein Paar (V, E) mit

- einer Menge V von Knoten (vertices) und
- einer Menge $E \subseteq \{ (u, v) \mid u, v \in V \}$ von Kanten (edges).

Ungerichteter Graph

Ein ungerichteter Graph G ist ein Paar (V, E) mit

- einer Menge V von Knoten (vertices) und
- einer Menge $E \subseteq \{\{u, v\} \mid u, v \in V,\ u \neq v\}$ von Kanten (edges).

Auch für ungerichtete Kanten verwenden wir die Notation (u, v).

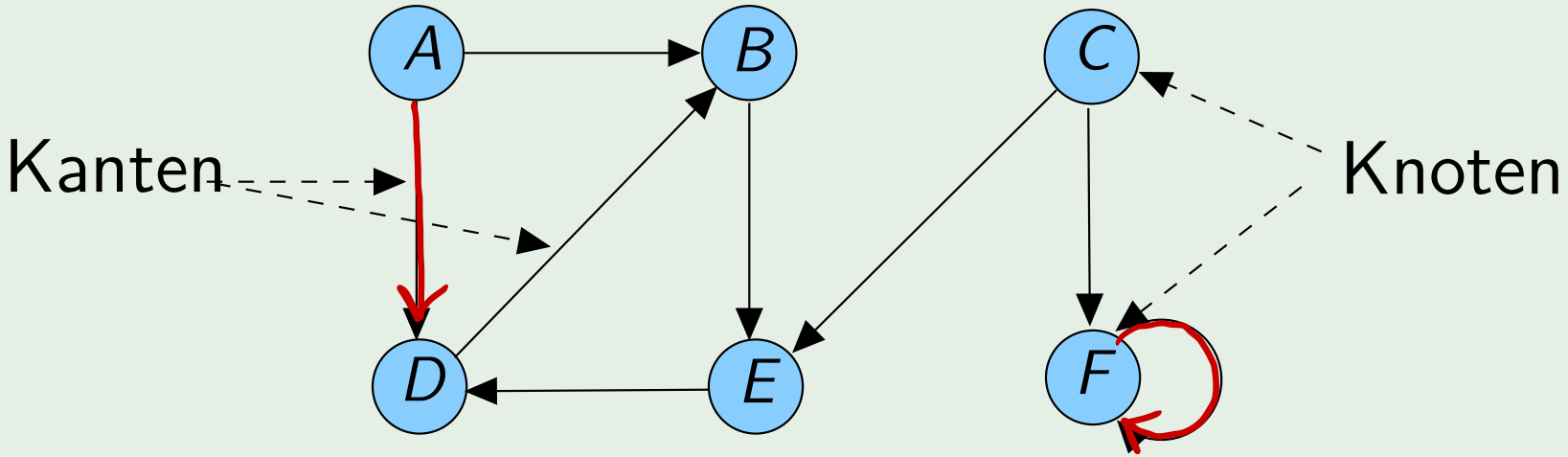
Adjazent

Knoten $v \in V$ ist adjazent zu $u \in V$, wenn $(u, v) \in E$.

Gerichteter Graph

Beispiel

- $V = \{ A, \ldots, F \}$
- $E = \{ (A, B), (A, D), (B, E), (C, E), (C, F), (D, B), (E, D), (F, F) \}$



A und B sind adjazent, wie auch z.B. C und E, und F und F.

Terminologie bei Graphen

Teilgraph

Ein Teilgraph (subgraph) eines Graphen $G = (V, E)$ ist ein Graph $G' = (V', E')$ mit:

Terminologie bei Graphen

Teilgraph

Ein Teilgraph (subgraph) eines Graphen $G = (V, E)$ ist ein Graph $G' = (V', E')$ mit:

- $V' \subseteq V$ und $E' \subseteq E$.

Terminologie bei Graphen

Teilgraph

Ein Teilgraph (subgraph) eines Graphen $G = (V, E)$ ist ein Graph $G' = (V', E')$ mit:

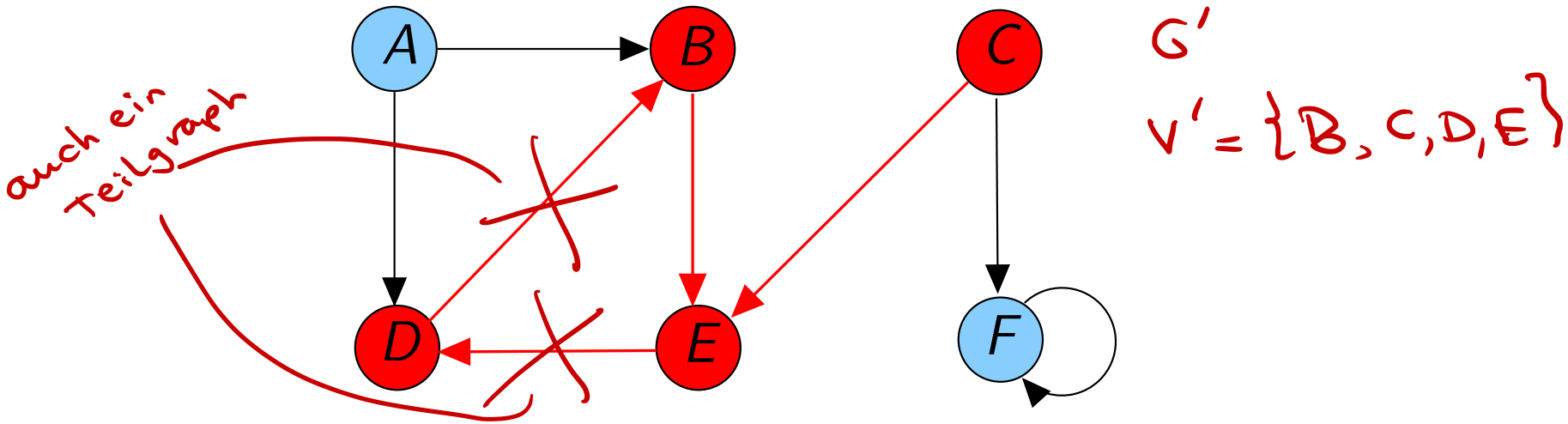
- $V' \subseteq V$ und $E' \subseteq E$.
- Außerdem ist $E' \subseteq V' \times V'$ wegen der Grapheigenschaft von G'.

Terminologie bei Graphen

Teilgraph

Ein Teilgraph (subgraph) eines Graphen $G = (V, E)$ ist ein Graph $G' = (V', E')$ mit:

- $V' \subseteq V$ und $E' \subseteq E$.
- Außerdem ist $E' \subseteq V' \times V'$ wegen der Grapheigenschaft von G'.
- Ist $V' \subset V$ und $E' \subset E$, so heißt G' echter (proper) Teilgraph.



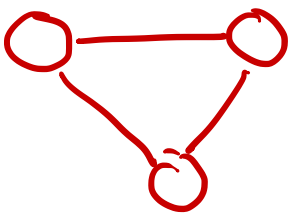
Beispiel: Rote Knoten und Kanten bilden einen (echten) Teilgraphen

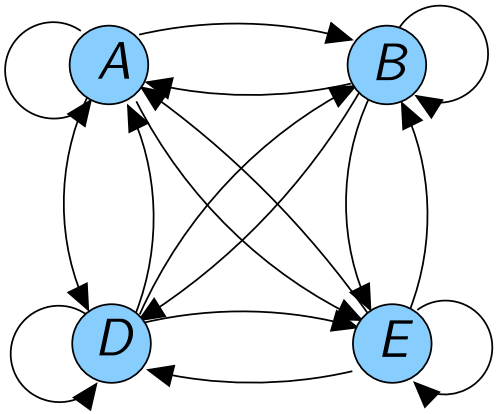
Terminologie bei Graphen

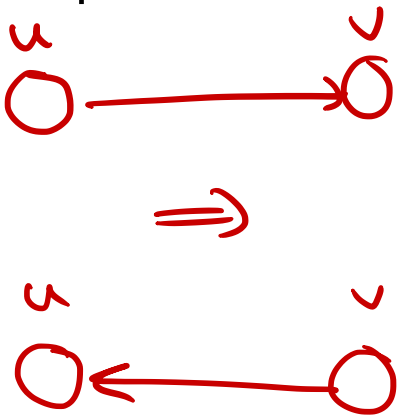
Symmetrischer Graph

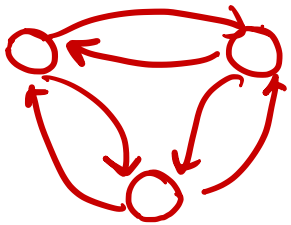
Der Graph G heißt symmetrisch, wenn aus $(u, v) \in E$ folgt $(v, u) \in E$.

- Zu jedem ungerichteten Graphen gibt es einen korrespondierenden symmetrischen gerichteten Graphen.

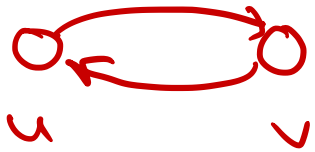








Beispiel: symmetrischer gerichteter Graph

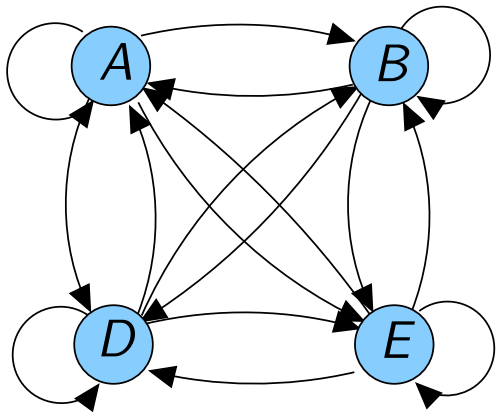


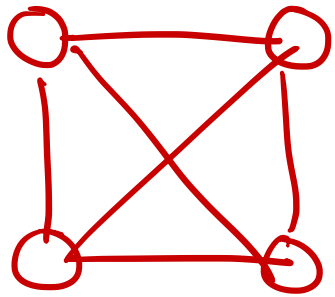
Terminologie bei Graphen

Symmetrischer Graph

Der Graph G heißt symmetrisch, wenn aus $(u, v) \in E$ folgt $(v, u) \in E$.

- Zu jedem ungerichteten Graphen gibt es einen korrespondierenden symmetrischen gerichteten Graphen.





Beispiel: symmetrischer gerichteter Graph

Vollständiger Graph

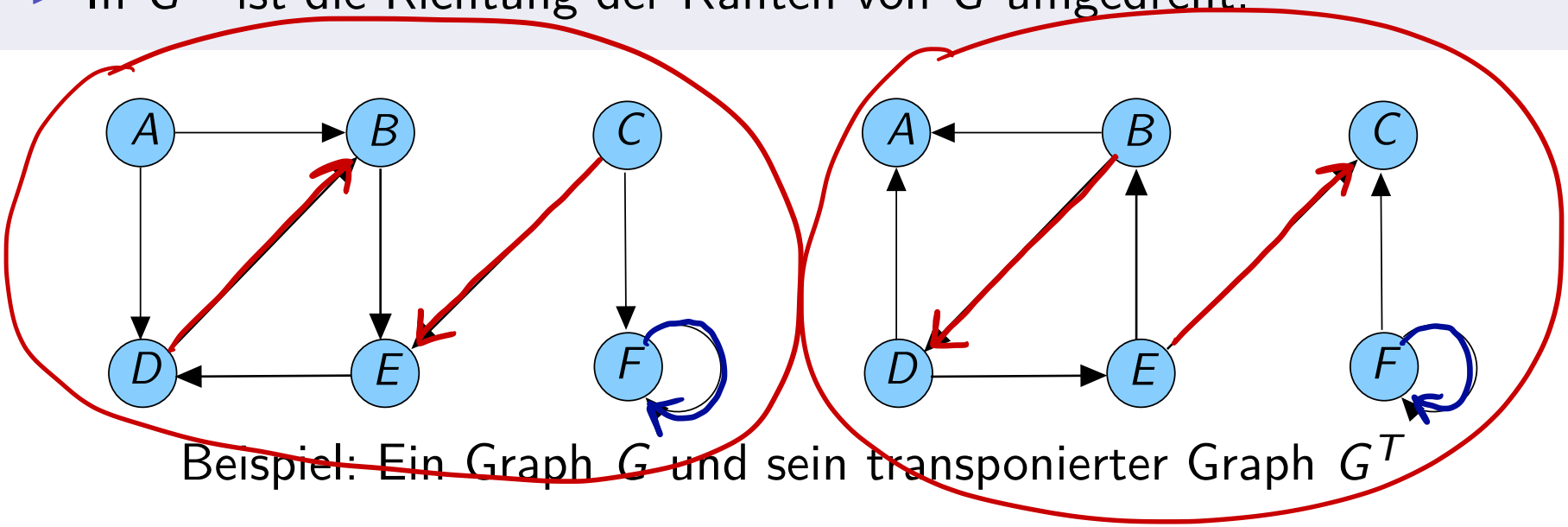
Ein ungerichteter Graph ist vollständig, wenn *jedes* Paar von Knoten durch eine Kante verbunden ist.

Terminologie bei Graphen

Transponieren

Transponiert man $G = (V, E)$, so erhält man $G^T = (V, E')$ mit $(v, u) \in E'$ gdw. $(u, v) \in E$.

- In G^T ist die Richtung der Kanten von G umgedreht.

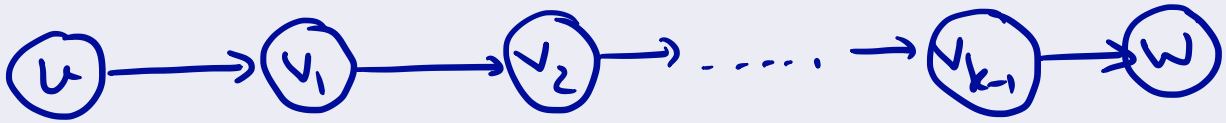


Beispiel: Ein Graph G und sein transponierter Graph G^T

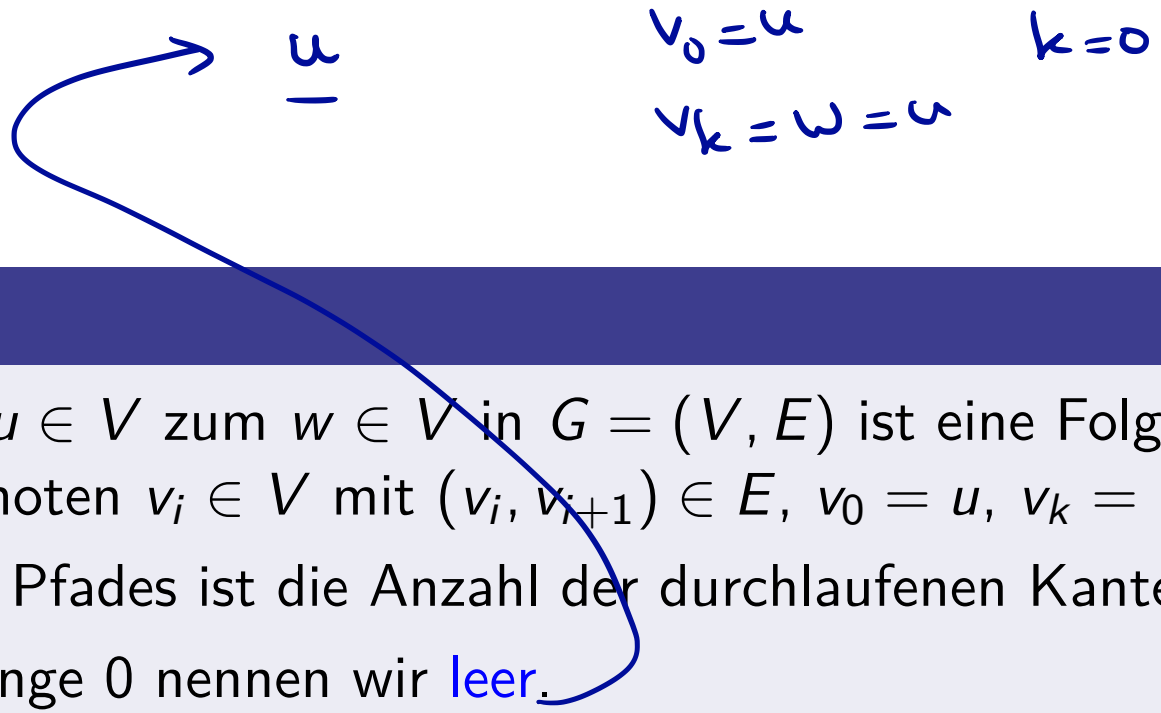
Pfade

Pfad (Weg)

Ein Pfad vom Knoten $u \in V$ zum $w \in V$ in $G = (V, E)$ ist eine Folge $v_0\, v_1 \ldots v_{k-1}\, v_k$ von Knoten $v_i \in V$ mit $(v_i, v_{i+1}) \in E$, $v_0 = u$, $v_k = w$.



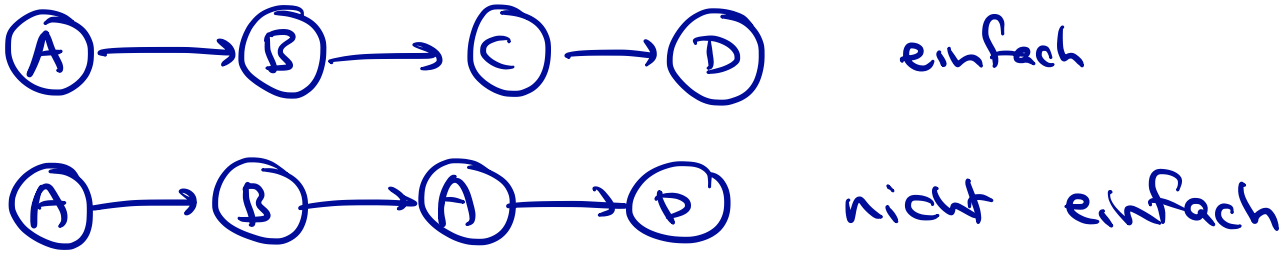
Pfade



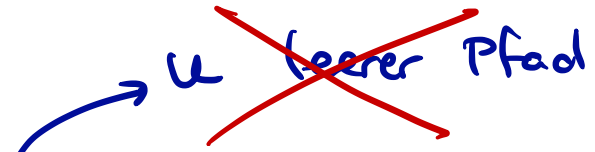
Pfad (Weg)

Ein Pfad vom Knoten $u \in V$ zum $w \in V$ in $G = (V, E)$ ist eine Folge $v_0\, v_1 \ldots v_{k-1}\, v_k$ von Knoten $v_i \in V$ mit $(v_i, v_{i+1}) \in E$, $v_0 = u$, $v_k = w$.

- Die Länge k eines Pfades ist die Anzahl der durchlaufenen Kanten.
- Einen Pfad der Länge 0 nennen wir leer.
- Ein Pfad mit $v_i \neq v_j$ für alle $i \neq j$ heißt einfach.
- Knoten w ist erreichbar von u, wenn es einen Pfad von u nach w gibt.



Zyklen



Zyklen in gerichtenen Graphen

Ein Zyklus in einem *gerichteten* Graph ist ein nicht-leerer Pfad bei dem der Startknoten auch der Endknoten ist.

Zyklen

Zyklen in gerichtenen Graphen

Ein Zyklus in einem *gerichteten* Graph ist ein nicht-leerer Pfad bei dem der Startknoten auch der Endknoten ist.

- Ein Zyklus vv der Länge 1 heißt Schlinge (self-loop).
- Ein Zyklus $v_0 \dots v_k$ ist einfach wenn $v_1, \dots, v_k$ paarweise verschieden sind.
- Ein gerichteter Graph ist azyklisch, wenn er keine Zyklen hat.

Zyklen

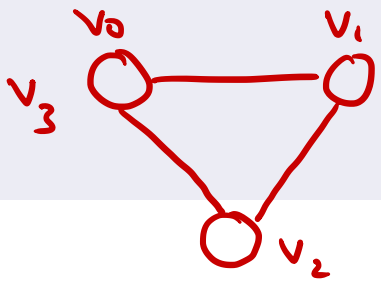
Zyklen in gerichtenen Graphen

Ein Zyklus in einem *gerichteten* Graph ist ein nicht-leerer Pfad bei dem der Startknoten auch der Endknoten ist.

- Ein Zyklus vv der Länge 1 heißt Schlinge (self-loop).
- Ein Zyklus $v_0 \dots v_k$ ist einfach wenn $v_1, \dots, v_k$ paarweise verschieden sind.
- Ein gerichteter Graph ist azyklisch, wenn er keine Zyklen hat.

Zyklen in ungerichteten Graphen

Ein Zyklus in einem *ungerichteten* Graph ist ein Pfad $v_0 \dots v_k$ mit $k \geqslant 3$, $v_0 = v_k$ und $v_1, \dots, v_k$ paarweise verschieden.



Zyklen

Zyklen in gerichtenen Graphen

Ein Zyklus in einem *gerichteten* Graph ist ein nicht-leerer Pfad bei dem der Startknoten auch der Endknoten ist.

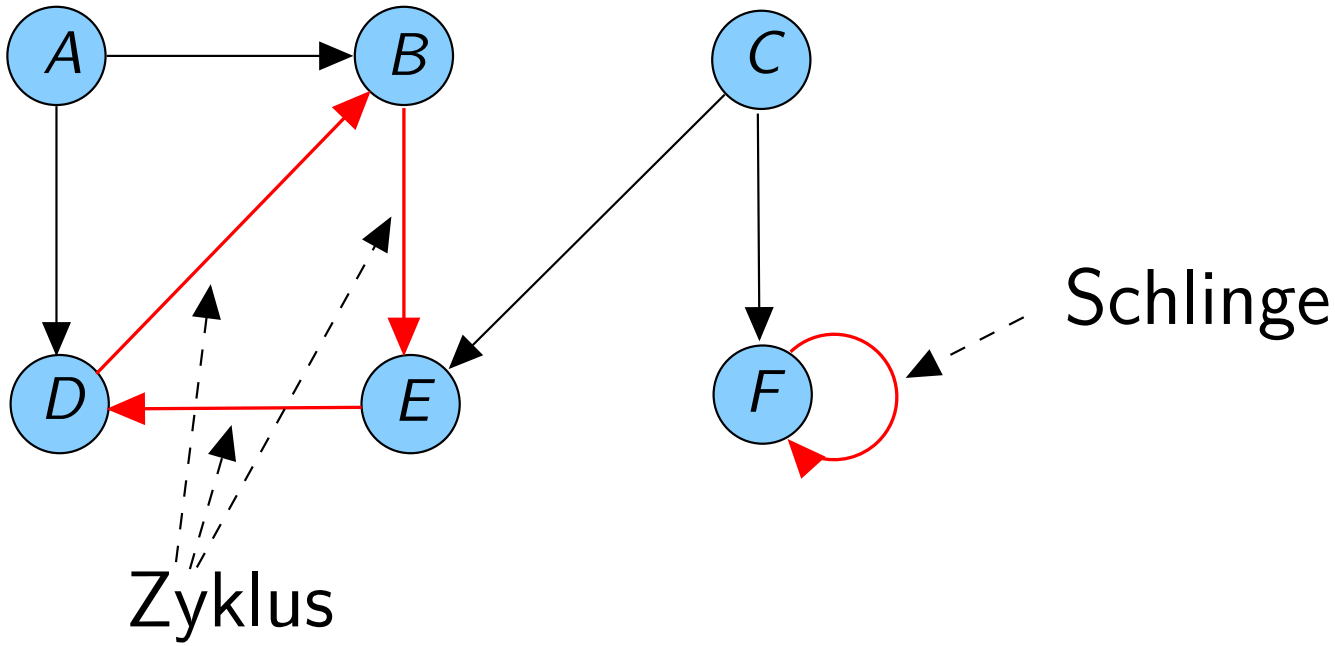
- Ein Zyklus vv der Länge 1 heißt Schlinge (self-loop).
- Ein Zyklus $v_0 \dots v_k$ ist einfach wenn $v_1, \dots, v_k$ paarweise verschieden sind.
- Ein gerichteter Graph ist azyklisch, wenn er keine Zyklen hat.

Zyklen in ungerichteten Graphen

Ein Zyklus in einem *ungerichteten* Graph ist ein Pfad $v_0 \dots v_k$ mit $k \geqslant 3$, $v_0 = v_k$ und $v_1, \dots, v_k$ paarweise verschieden.

- Ein ungerichteter Graph ist azyklisch, wenn er keine Zyklen hat.

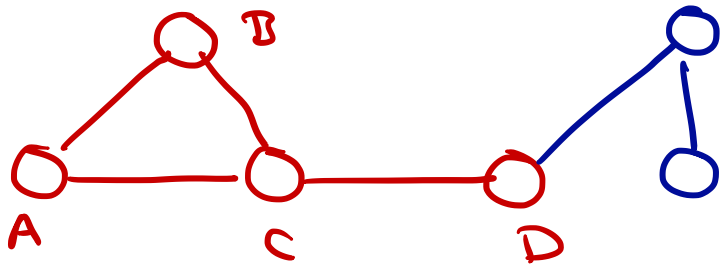
Pfade und Zyklen



$A\,B\,E\,D\,B$ und $C\,F\,F$ sind Pfade, aber keine einfache Pfade.

$E\,D\,B$ und $C\,F$ sind einfache Pfade.

Zusammenhangskomponenten in ungerichteten Graphen



Zusammenhangskomponenten in ungerichteten Graphen

Sei G ein ungerichteter Graph.

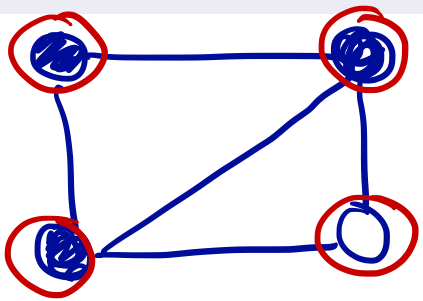
- G heißt zusammenhängend (connected), wenn jeder Knoten von jedem anderen Knoten aus erreichbar ist.

Zusammenhangskomponenten in ungerichteten Graphen

Zusammenhangskomponenten in ungerichteten Graphen

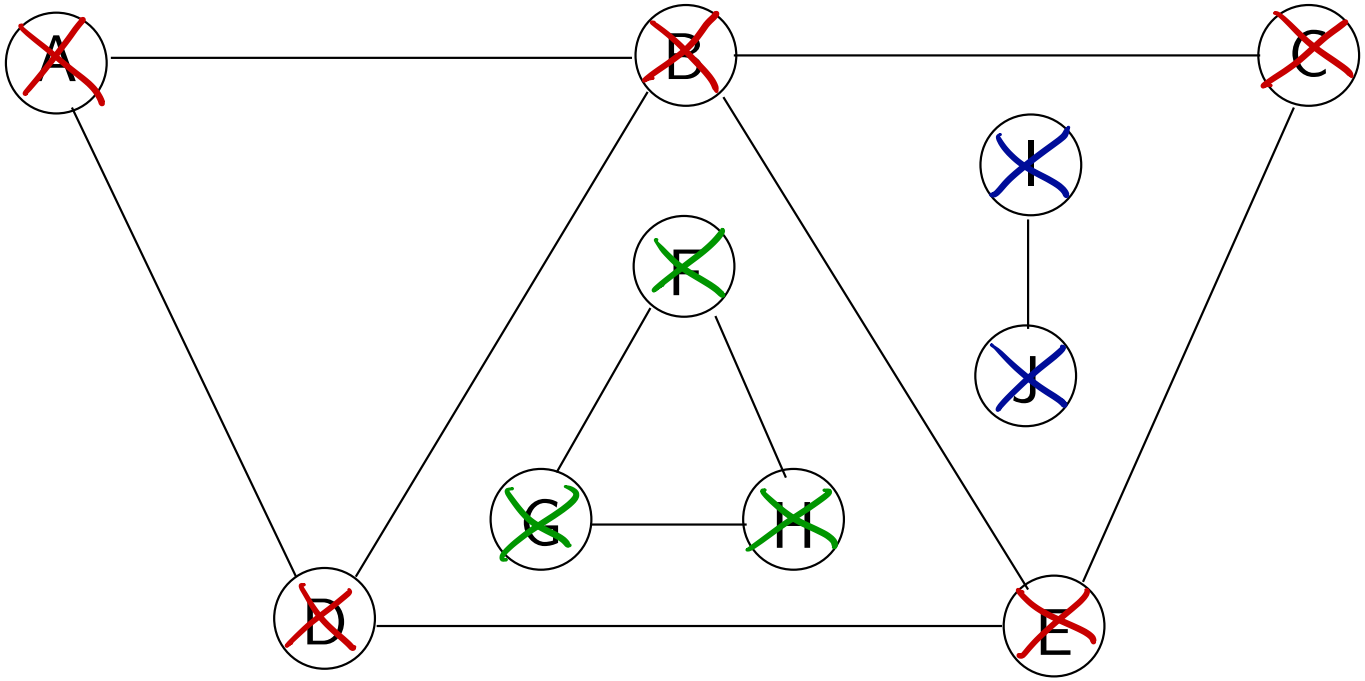
Sei G ein ungerichteter Graph.

- G heißt zusammenhängend (connected), wenn jeder Knoten von jedem anderen Knoten aus erreichbar ist.
- Eine Zusammenhangskomponente (connected component, CC) von G ist ein maximaler (d.h. nicht erweiterbarer) zusammenhängender Teilgraph von G.



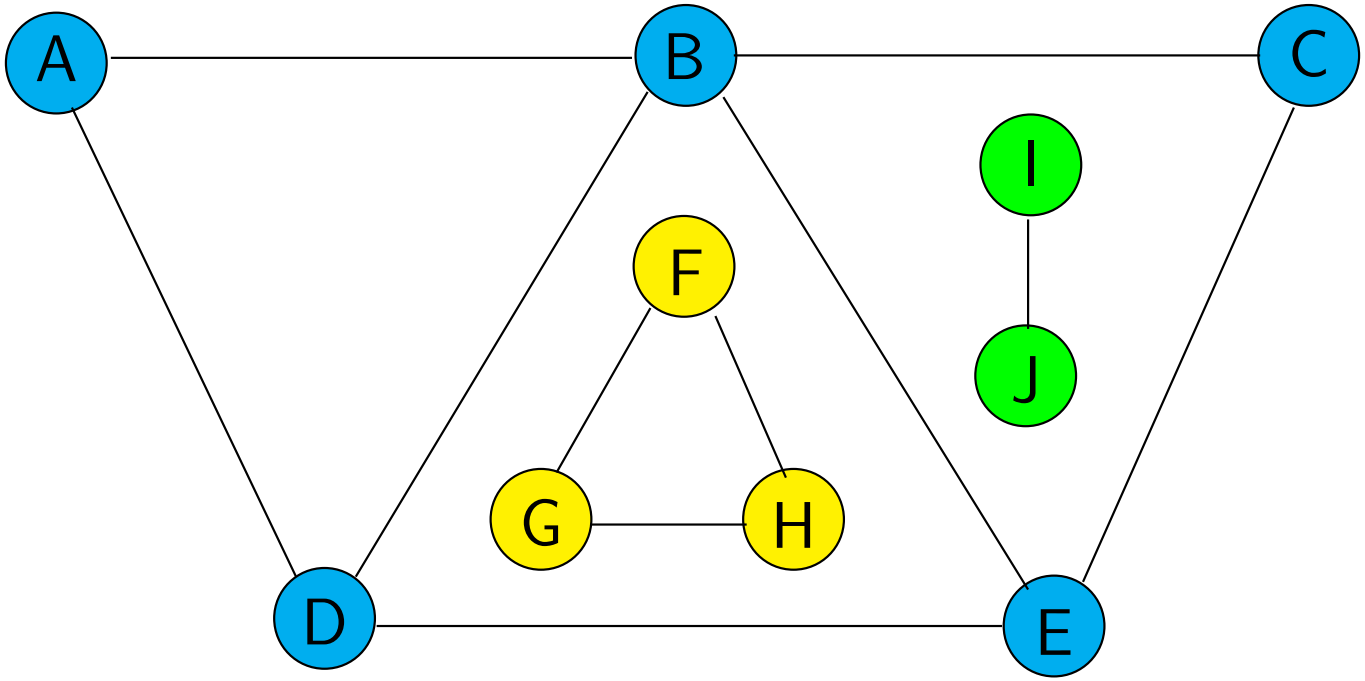
O = maximal
= CC
O = connected
nicht maximal

Ungerichtete, zusammenhängende Graphen



Ein ungerichteter Graph; Was sind die Zusammenhangskomponenten?

Ungerichtete, zusammenhängende Graphen



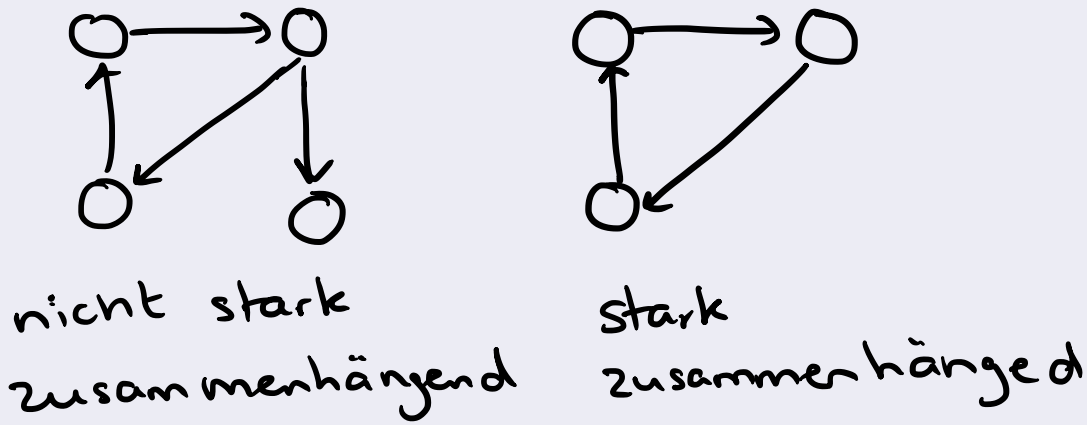
Die Zusammenhangskomponenten.

Zusammenhangskomponenten in gerichteten Graphen

Zusammenhangskomponenten in gerichteten Graphen

Sei G ein gerichteter Graph.

- G heißt stark zusammenhängend (strongly connected), wenn jeder Knoten von jedem anderen Knoten aus erreichbar ist.

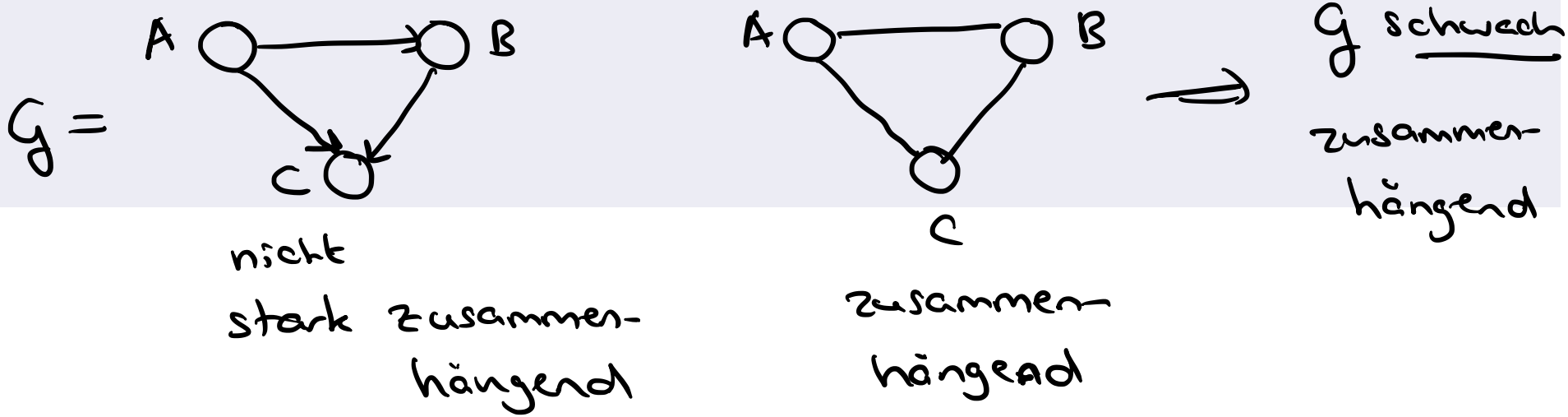


Zusammenhangskomponenten in gerichteten Graphen

Zusammenhangskomponenten in gerichteten Graphen

Sei G ein gerichteter Graph.

- G heißt stark zusammenhängend (strongly connected), wenn jeder Knoten von jedem anderen Knoten aus erreichbar ist.
- G heißt schwach zusammenhängend (weakly connected), wenn der zugehörige ungerichtete Graph (wenn man alle Kanten ungerichtet macht) zusammenhängend ist.



Zusammenhangskomponenten in gerichteten Graphen

Zusammenhangskomponenten in gerichteten Graphen

Sei G ein gerichteter Graph.

- G heißt stark zusammenhängend (strongly connected), wenn jeder Knoten von jedem anderen Knoten aus erreichbar ist.
- G heißt schwach zusammenhängend (weakly connected), wenn der zugehörige ungerichtete Graph (wenn man alle Kanten ungerichtet macht) zusammenhängend ist.
- Eine starke Zusammenhangskomponente (strongly connected component, SCC) von G ist ein maximaler stark zusammenhängender Teilgraph von G.

Zusammenhangskomponenten in gerichteten Graphen

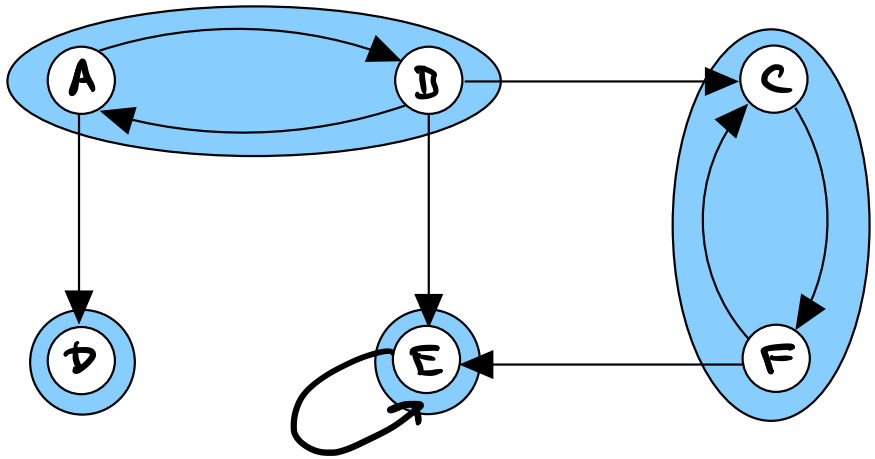
Zusammenhangskomponenten in gerichteten Graphen

Sei G ein gerichteter Graph.

- G heißt stark zusammenhängend (strongly connected), wenn jeder Knoten von jedem anderen Knoten aus erreichbar ist.
- G heißt schwach zusammenhängend (weakly connected), wenn der zugehörige ungerichtete Graph (wenn man alle Kanten ungerichtet macht) zusammenhängend ist.
- Eine starke Zusammenhangskomponente (strongly connected component, SCC) von G ist ein maximaler stark zusammenhängender Teilgraph von G.

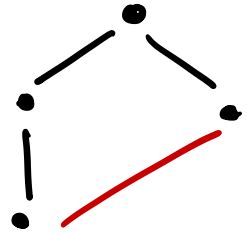
- Die Zerlegung eines Graphen in seine Zusammenhangskomponente ist eindeutig.

Starke Zusammenhangskomponenten



Ein gerichteter Graph und seine starke Zusammenhangskomponente (SCCs).

Zusammenhang



Bemerkungen

- Ein Baum (zusammenhängender azyklischer Graph) mit n Knoten hat $n-1$ Kanten.
- Ein ungerichteter Graph mit n Knoten und weniger als $n-1$ Kanten kann nicht zusammenhängend sein.
- Ein ungerichteter Graph mit n Knoten und mindestens n Kanten muss einen Zyklus enthalten.

Übersicht

Repräsentation von Graphen: Adjazenzmatrix

Sei $G = (V, E)$ mit $|V| = n$, $|E| = m$ und $V = \{ v_1, \ldots, v_n \}$.

Repräsentation von Graphen: Adjazenzmatrix

Sei $G = (V, E)$ mit $|V| = n$, $|E| = m$ und $V = \{ v_1, \ldots, v_n \}$.

Adjazenzmatrix

Die Adjazenzmatrix-Darstellung eines Graphen ist durch eine $n \times n$ boolesche Matrix A gegeben, wobei $A(i, j) = 1$, wenn $(v_i, v_j) \in E$, sonst 0.

Repräsentation von Graphen: Adjazenzmatrix

Sei $G = (V, E)$ mit $|V| = n$, $|E| = m$ und $V = \{ v_1, \ldots, v_n \}$.

Adjazenzmatrix

Die Adjazenzmatrix-Darstellung eines Graphen ist durch eine $n \times n$ boolesche Matrix A gegeben, wobei $A(i, j) = 1$, wenn $(v_i, v_j) \in E$, sonst 0.

- Wenn G ungerichtet ist, ergibt sich symmetrisches A (d. h. $A = A^T$). Dann muss nur die Hälfte gespeichert werden.

Repräsentation von Graphen: Adjazenzmatrix

Sei $G = (V, E)$ mit $|V| = n$, $|E| = m$ und $V = \{ v_1, \ldots, v_n \}$.

Adjazenzmatrix

Die Adjazenzmatrix-Darstellung eines Graphen ist durch eine $n \times n$ boolesche Matrix A gegeben, wobei $A(i, j) = 1$, wenn $(v_i, v_j) \in E$, sonst 0.

- Wenn G ungerichtet ist, ergibt sich symmetrisches A (d. h. $A = A^T$). Dann muss nur die Hälfte gespeichert werden.

$\Rightarrow$ Platzbedarf: $\Theta(n^2)$.

Repräsentation von Graphen: Adjazenzliste

Adjazenzliste

Bei der Darstellung als Array von Adjazenzlisten gibt es ein durch die Nummer des Knoten indiziertes Array, das jeweils verkettete Listen (Adjazenzlisten) enthält.

- Der i-te Arrayeintrag enthält alle Kanten von G, die von v_i „ausgehen“.

Repräsentation von Graphen: Adjazenzliste

Adjazenzliste

Bei der Darstellung als Array von Adjazenzlisten gibt es ein durch die Nummer des Knoten indiziertes Array, das jeweils verkettete Listen (Adjazenzlisten) enthält.

- Der i-te Arrayeintrag enthält alle Kanten von G, die von v_i „ausgehen“.

- Ist G ungerichtet, dann werden Kanten doppelt gespeichert.

Repräsentation von Graphen: Adjazenzliste

Adjazenzliste

Bei der Darstellung als Array von Adjazenzlisten gibt es ein durch die Nummer des Knoten indiziertes Array, das jeweils verkettete Listen (Adjazenzlisten) enthält.

- Der i-te Arrayeintrag enthält alle Kanten von G, die von v_i „ausgehen“.

- Ist G ungerichtet, dann werden Kanten doppelt gespeichert.
- Kanten, die nicht in G vorkommen, benötigen keinen Speicherplatz.

Repräsentation von Graphen: Adjazenzliste

Adjazenzliste

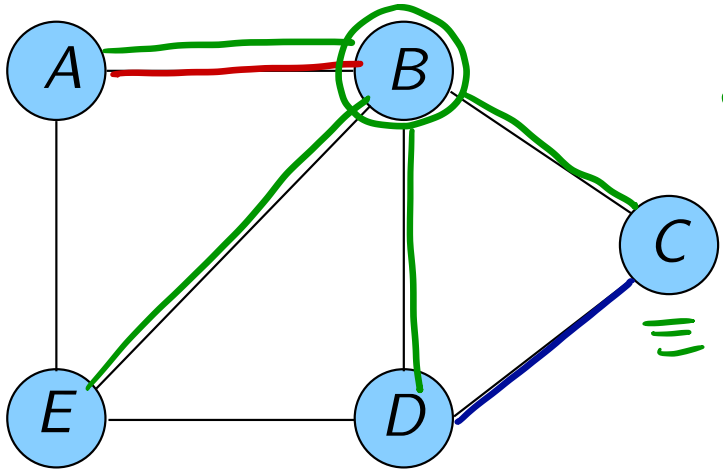
Bei der Darstellung als Array von Adjazenzlisten gibt es ein durch die Nummer des Knoten indiziertes Array, das jeweils verkettete Listen (Adjazenzlisten) enthält.

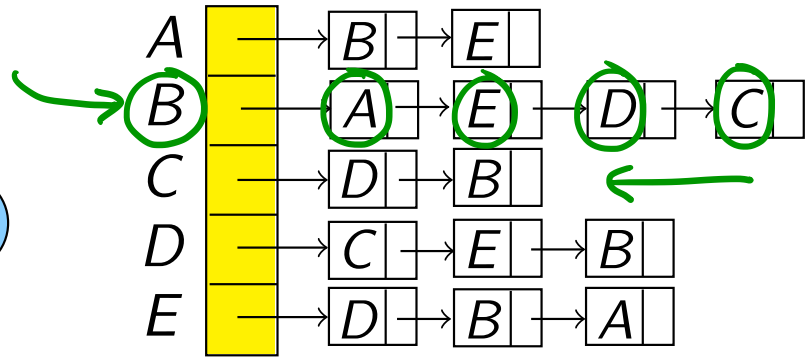
- Der i-te Arrayeintrag enthält alle Kanten von G, die von v_i „ausgehen“.

- Ist G ungerichtet, dann werden Kanten doppelt gespeichert.
- Kanten, die nicht in G vorkommen, benötigen keinen Speicherplatz.

$\Rightarrow$ Platzbedarf: $\Theta(n + m)$.

Darstellung eines ungerichteten Graphen



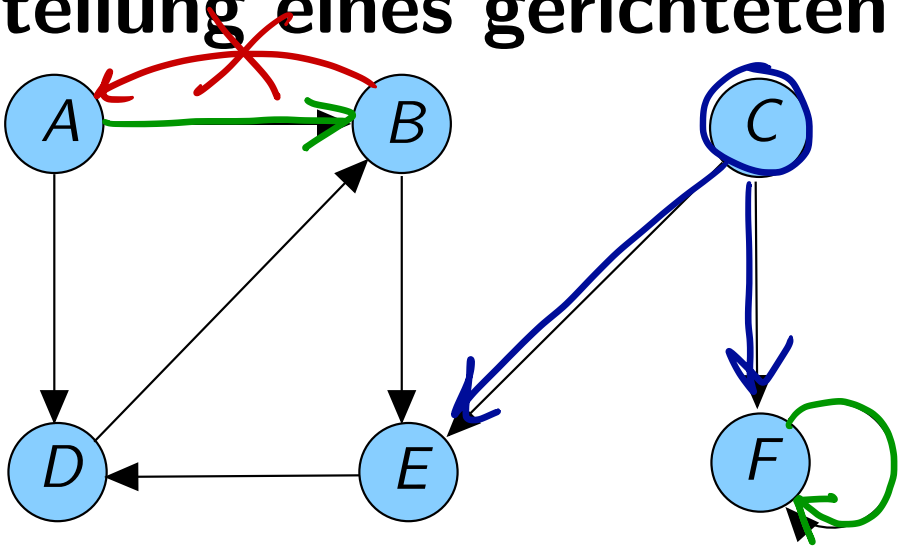


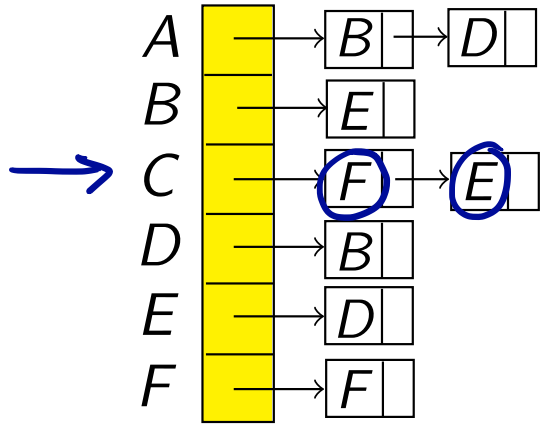
Adjazenzliste

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Adjazenzmatrix

Darstellung eines gerichteten Graphen





Adjazenzliste

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Adjazenzmatrix

Übersicht

Graphendurchlauf

Viele Algorithmen, die wir später kennenlernen werden, untersuchen jeden Knoten (und jede Kante).

Graphendurchlauf

Viele Algorithmen, die wir später kennenlernen werden, untersuchen jeden Knoten (und jede Kante).

Es gibt verschiedene Graphendurchlaufstrategien (traversal strategies), die jeden Knoten (oder jede Kante) besuchen:

- Tiefensuche
- Breitensuche

Graphendurchlauf

Viele Algorithmen, die wir später kennenlernen werden, untersuchen jeden Knoten (und jede Kante).

Es gibt verschiedene Graphendurchlaufstrategien (traversal strategies), die jeden Knoten (oder jede Kante) besuchen:

- Tiefensuche
- Breitensuche

- Dies sind Verallgemeinerungen von Strategien zur Baumtraversierung.

inorder
preorder
postorder

Graphendurchlauf

Viele Algorithmen, die wir später kennenlernen werden, untersuchen jeden Knoten (und jede Kante).

Es gibt verschiedene Graphendurchlaufstrategien (traversal strategies), die jeden Knoten (oder jede Kante) besuchen:

- Tiefensuche
- Breitensuche

- Dies sind Verallgemeinerungen von Strategien zur Baumtraversierung.
- Da Graphen zyklisch sein können, müssen wir uns aber alle bereits gefundenen Knoten merken.

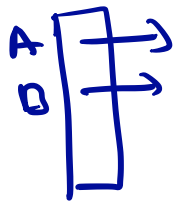
Graphendurchlauf

Viele Algorithmen, die wir später kennenlernen werden, untersuchen jeden Knoten (und jede Kante).

Es gibt verschiedene Graphendurchlaufstrategien (traversal strategies), die jeden Knoten (oder jede Kante) besuchen:

- Tiefensuche
- Breitensuche

- Dies sind Verallgemeinerungen von Strategien zur Baumtraversierung.
- Da Graphen zyklisch sein können, müssen wir uns aber alle bereits gefundenen Knoten merken.
- Im Folgenden nehmen wir die Adjazenzlisten-Darstellung an.



Graphendurchlauf

Viele Algorithmen, die wir später kennenlernen werden, untersuchen jeden Knoten (und jede Kante).

Es gibt verschiedene Graphendurchlaufstrategien (traversal strategies), die jeden Knoten (oder jede Kante) besuchen:

- Tiefensuche
- Breitensuche

- Dies sind Verallgemeinerungen von Strategien zur Baumtraversierung.
- Da Graphen zyklisch sein können, müssen wir uns aber alle bereits gefundenen Knoten merken.
- Im Folgenden nehmen wir die Adjazenzlisten-Darstellung an.
- Dann: Zeitaufwand von Tiefen- und Breitensuche in $\mathcal{O}(|V| + |E|)$.

$\mathcal{O}(|V|^2)$

Übersicht

Breitensuche

Breitensuche (Breadth-First Search, BFS)

Breitensuche

Breitensuche (Breadth-First Search, BFS)

Am Anfang seien alle Knoten als "nicht-gefunden" (`WHITE`) markiert.

Breitensuche

Breitensuche (Breadth-First Search, BFS)

Am Anfang seien alle Knoten als "nicht-gefunden" (`WHITE`) markiert.
Die zugrundeliegende Strategie ist:

Breitensuche

Breitensuche (Breadth-First Search, BFS)

Am Anfang seien alle Knoten als "nicht-gefunden" (`WHITE`) markiert.
Die zugrundeliegende Strategie ist:

- Markiere den aktuellen Knoten v als "gefunden" (`GRAY`).

Breitensuche

Breitensuche (Breadth-First Search, BFS)

Am Anfang seien alle Knoten als "nicht-gefunden" (`WHITE`) markiert.
Die zugrundeliegende Strategie ist:

- Markiere den aktuellen Knoten v als "gefunden" (`GRAY`).
- Suche „gleichzeitig" aus allen "gefundenen" Knoten weiter:

Breitensuche

Breitensuche (Breadth-First Search, BFS)

Am Anfang seien alle Knoten als "nicht-gefunden" (`WHITE`) markiert.
Die zugrundeliegende Strategie ist:

- Markiere den aktuellen Knoten v als "gefunden" (`GRAY`).
- Suche „gleichzeitig" aus allen "gefundenen" Knoten weiter:
  - Markiere alle ihrer noch "nicht-gefundenen" Nachfolger als "gefunden" und
  - markiere die Knoten selbst als "abgeschlossen" (`BLACK`).

Breitensuche

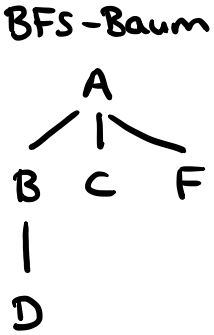
Breitensuche (Breadth-First Search, BFS)

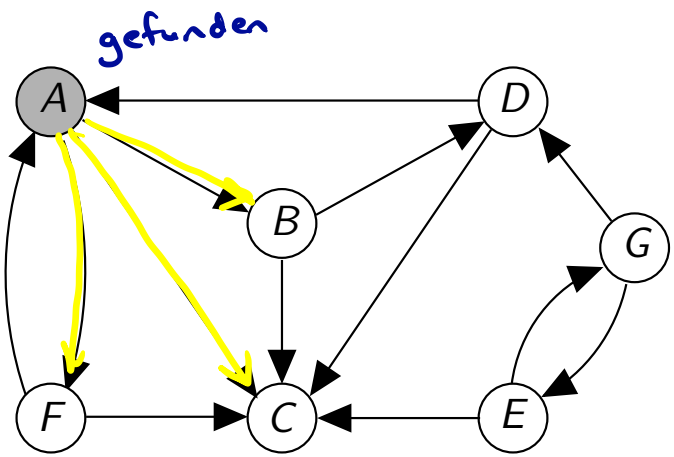
Am Anfang seien alle Knoten als "nicht-gefunden" (`WHITE`) markiert.
Die zugrundeliegende Strategie ist:

- Markiere den aktuellen Knoten v als "gefunden" (`GRAY`).
- Suche „gleichzeitig" aus allen "gefundenen" Knoten weiter:
  - Markiere alle ihrer noch "nicht-gefundenen" Nachfolger als "gefunden" und
  - markiere die Knoten selbst als "abgeschlossen" (`BLACK`).

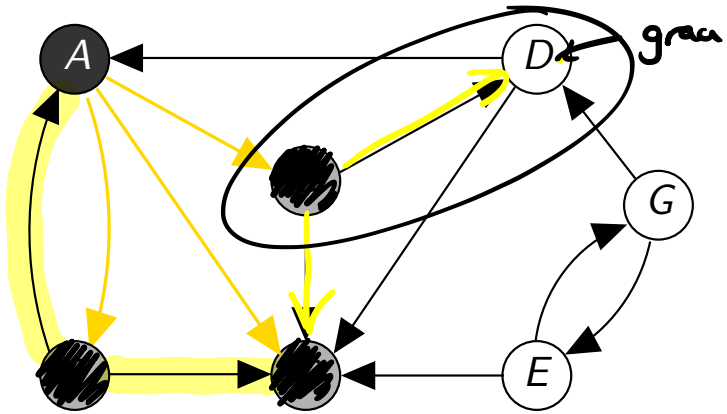
- Man erhält die Menge aller Knoten, die vom Startknoten aus erreichbar sind.

Breitensuche: Beispiel

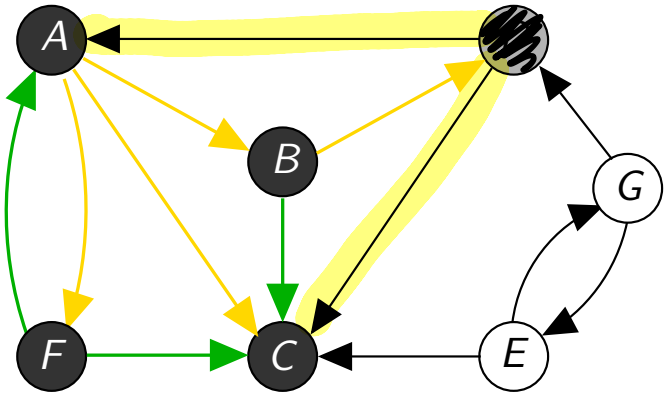




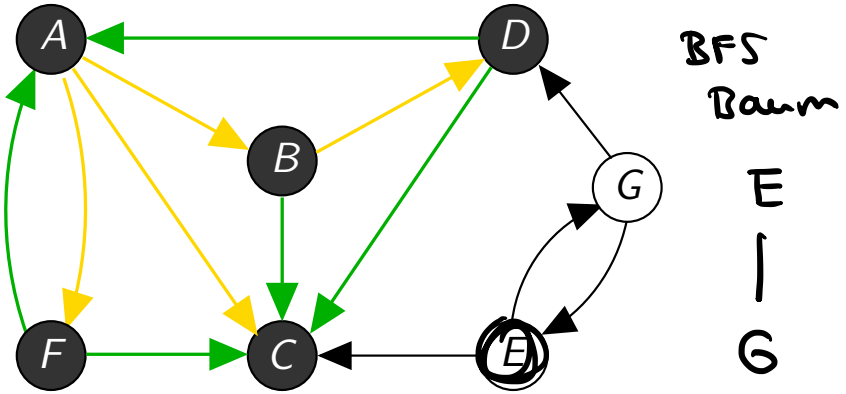
Beginn der Breitensuche



Erforsche alle folgenden nicht-gefundenen Knoten



Erforsche alle folgenden nicht-gefundenen Knoten



Fertig!

Breitensuche: Implementierung

```
1  void BFS(List adj[n], int start, int &color[n]) {
2    Queue wait; // zu verarbeitende Knoten
3    color[start] = GRAY; // Knoten start ist noch zu verarbeiten
4    wait.enqueue(start);
5    while (!wait.isEmpty()) {// es gibt noch unverarbeitete Knoten
6      int v = wait.dequeue(); // nächster unverarbeiteter Knoten
7      foreach (w in adj[v]) {
8        if (color[w] == WHITE) { // neuer ("ungefundener") Knoten
9          color[w] = GRAY; // w ist noch zu verarbeiten
10         wait.enqueue(w);
11       }
12     }
13     color[v] = BLACK; // v ist abgeschlossen
14   }
15 }

17 void completeBFS(List adj[n], int n) {
18   int color[n] = WHITE; // noch kein Knoten ist gefunden worden
19   for (int i = 0; i < n; i++)
20     if (color[i] == WHITE) BFS(adj, n, i, color);
21 }
```

Eigenschaften der Breitensuche

- Knoten werden in der Reihenfolge mit zunehmendem kürzesten Abstand (Kantendistanz) vom Startknoten aus besucht.

Eigenschaften der Breitensuche

- Knoten werden in der Reihenfolge mit zunehmendem kürzesten Abstand (Kantendistanz) vom Startknoten aus besucht.
  - Nachdem alle Knoten mit Abstand d verarbeitet wurden, werden die mit $d + 1$ angegangen.

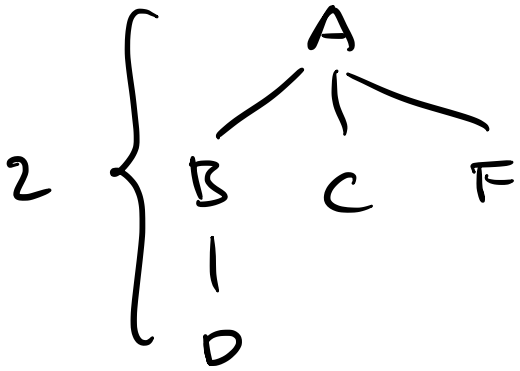
Eigenschaften der Breitensuche

- Knoten werden in der Reihenfolge mit zunehmendem kürzesten Abstand (Kantendistanz) vom Startknoten aus besucht.
  - Nachdem alle Knoten mit Abstand d verarbeitet wurden, werden die mit $d + 1$ angegangen.
  - Die Suche terminiert, wenn in Abstand d keine neuen Knoten auftreten.

Eigenschaften der Breitensuche

- Knoten werden in der Reihenfolge mit zunehmendem kürzesten Abstand (Kantendistanz) vom Startknoten aus besucht.
  - Nachdem alle Knoten mit Abstand d verarbeitet wurden, werden die mit $d + 1$ angegangen.
  - Die Suche terminiert, wenn in Abstand d keine neuen Knoten auftreten.
- Die Tiefe des Knotens v im Breitensuchbaum ist seine kürzeste Kantendistanz zum Startknoten.

BFS Baum



Eigenschaften der Breitensuche

- Knoten werden in der Reihenfolge mit zunehmendem kürzesten Abstand (Kantendistanz) vom Startknoten aus besucht.
  - Nachdem alle Knoten mit Abstand d verarbeitet wurden, werden die mit $d + 1$ angegangen.
  - Die Suche terminiert, wenn in Abstand d keine neuen Knoten auftreten.
- Die Tiefe des Knotens v im Breitensuchbaum ist seine kürzeste Kantendistanz zum Startknoten.
- Die zu verarbeitenden Knoten werden als FIFO-Queue (first-in first-out) organisiert.

Eigenschaften der Breitensuche

- Knoten werden in der Reihenfolge mit zunehmendem kürzesten Abstand (Kantendistanz) vom Startknoten aus besucht.
  - Nachdem alle Knoten mit Abstand d verarbeitet wurden, werden die mit $d + 1$ angegangen.
  - Die Suche terminiert, wenn in Abstand d keine neuen Knoten auftreten.
- Die Tiefe des Knotens v im Breitensuchbaum ist seine kürzeste Kantendistanz zum Startknoten.
- Die zu verarbeitenden Knoten werden als FIFO-Queue (first-in first-out) organisiert.

Komplexität der Breitensuche

Die Zeitkomplexität ist in $\mathcal{O}(|V| + |E|)$, der Platzbedarf in $\Theta(|V|)$.

wait queue

Übersicht

Tiefensuche

Tiefensuche (Depth-First Search, DFS)

Tiefensuche

Tiefensuche (Depth-First Search, DFS)

Am Anfang seien alle Knoten als „nicht-gefunden“ (`WHITE`) markiert.

Tiefensuche

Tiefensuche (Depth-First Search, DFS)

Am Anfang seien alle Knoten als „nicht-gefunden“ (`WHITE`) markiert.
Die zugrundeliegende Strategie ist:

Tiefensuche

Tiefensuche (Depth-First Search, DFS)

Am Anfang seien alle Knoten als „nicht-gefunden“ (`WHITE`) markiert.
Die zugrundeliegende Strategie ist:

- Markiere den aktuellen Knoten v als „gefunden“ (`GRAY`).

Tiefensuche

Tiefensuche (Depth-First Search, DFS)

Am Anfang seien alle Knoten als „nicht-gefunden“ (`WHITE`) markiert.
Die zugrundeliegende Strategie ist:

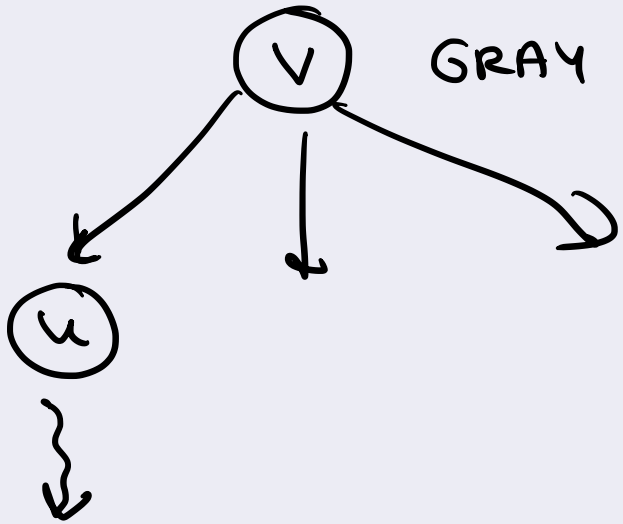
- Markiere den aktuellen Knoten v als „gefunden“ (`GRAY`).
- Solange es noch eine Kante (v, u) mit „nicht-gefundenem“ Nachfolger u gibt:

Tiefensuche

Tiefensuche (Depth-First Search, DFS)

Am Anfang seien alle Knoten als „nicht-gefunden“ (`WHITE`) markiert.
Die zugrundeliegende Strategie ist:

- Markiere den aktuellen Knoten v als „gefunden“ (`GRAY`).
- Solange es noch eine Kante (v, u) mit „nicht-gefundenem“ Nachfolger u gibt:
  - Suche rekursiv von u aus, d. h.:

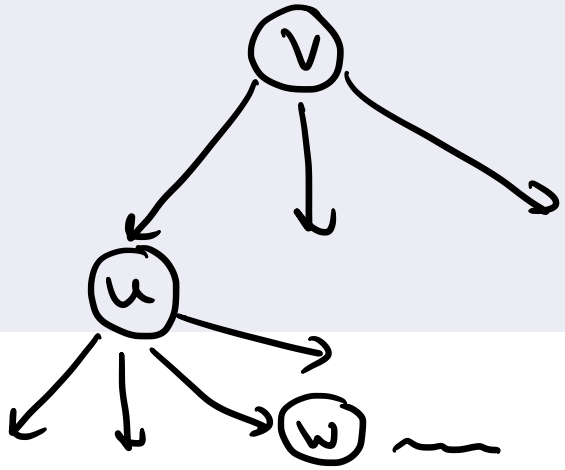


Tiefensuche

Tiefensuche (Depth-First Search, DFS)

Am Anfang seien alle Knoten als „nicht-gefunden“ (`WHITE`) markiert.
Die zugrundeliegende Strategie ist:

- Markiere den aktuellen Knoten v als „gefunden“ (`GRAY`).
- Solange es noch eine Kante (v, u) mit „nicht-gefundenem“ Nachfolger u gibt:
  - Suche rekursiv von u aus, d. h.:
  - Erforsche Kante (u, w), besuche w, forsche von dort aus, bis es nicht mehr weiter geht.



Tiefensuche

Tiefensuche (Depth-First Search, DFS)

Am Anfang seien alle Knoten als „nicht-gefunden“ (`WHITE`) markiert.
Die zugrundeliegende Strategie ist:

- Markiere den aktuellen Knoten v als „gefunden“ (`GRAY`).
- Solange es noch eine Kante (v, u) mit „nicht-gefundenem“ Nachfolger u gibt:
  - Suche rekursiv von u aus, d. h.:
  - Erforsche Kante (u, w), besuche w, forsche von dort aus, bis es nicht mehr weiter geht.
  - Markiere u als „abgeschlossen“ (`BLACK`).
  - Backtracke von u nach v.

Tiefensuche

Tiefensuche (Depth-First Search, DFS)

Am Anfang seien alle Knoten als „nicht-gefunden“ (`WHITE`) markiert.
Die zugrundeliegende Strategie ist:

- Markiere den aktuellen Knoten v als „gefunden“ (`GRAY`).
- Solange es noch eine Kante (v, u) mit „nicht-gefundenem“ Nachfolger u gibt:
  - Suche rekursiv von u aus, d. h.:
  - Erforsche Kante (u, w), besuche w, forsche von dort aus, bis es nicht mehr weiter geht.
  - Markiere u als „abgeschlossen“ (`BLACK`).
  - Backtracke von u nach v.
- Markiere v als „abgeschlossen“ (`BLACK`).

Tiefensuche

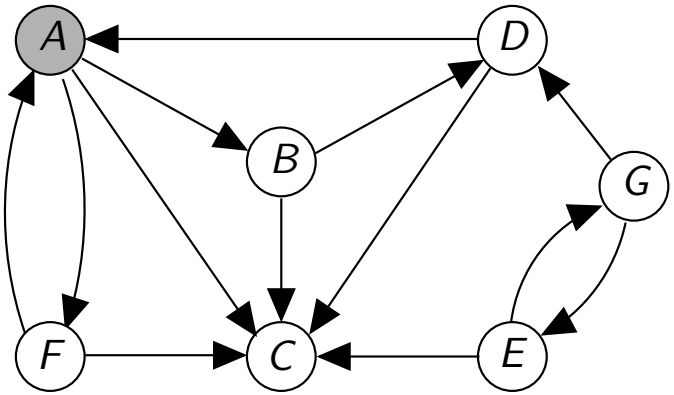
Tiefensuche (Depth-First Search, DFS)

Am Anfang seien alle Knoten als „nicht-gefunden“ (`WHITE`) markiert.
Die zugrundeliegende Strategie ist:

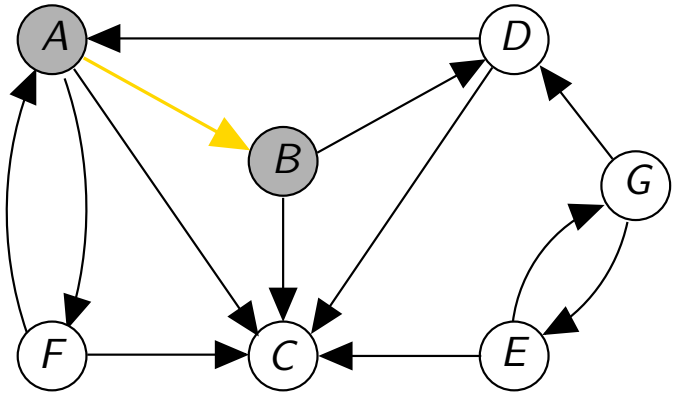
- Markiere den aktuellen Knoten v als „gefunden“ (`GRAY`).
- Solange es noch eine Kante (v, u) mit „nicht-gefundenem“ Nachfolger u gibt:
  - Suche rekursiv von u aus, d. h.:
  - Erforsche Kante (u, w), besuche w, forsche von dort aus, bis es nicht mehr weiter geht.
  - Markiere u als „abgeschlossen“ (`BLACK`).
  - Backtracke von u nach v.
- Markiere v als „abgeschlossen“ (`BLACK`).

- Man erhält wieder die Menge aller Knoten, die vom Startknoten aus erreichbar sind.

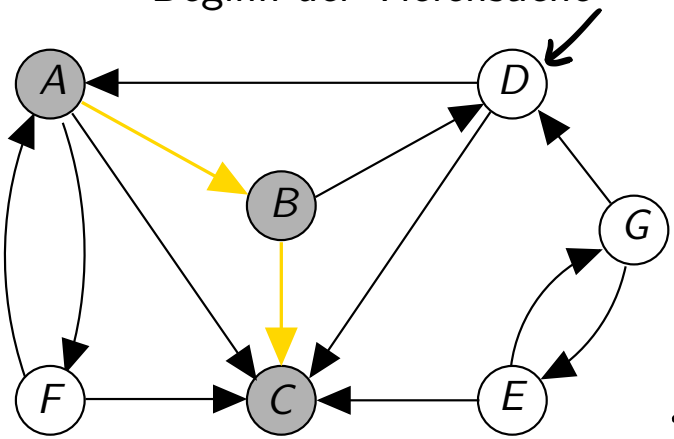
Tiefensuche: Beispiel



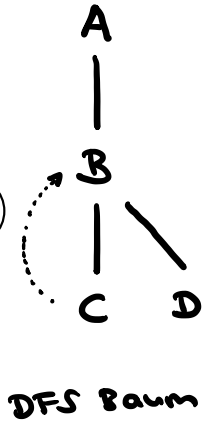
Beginn der Tiefensuche

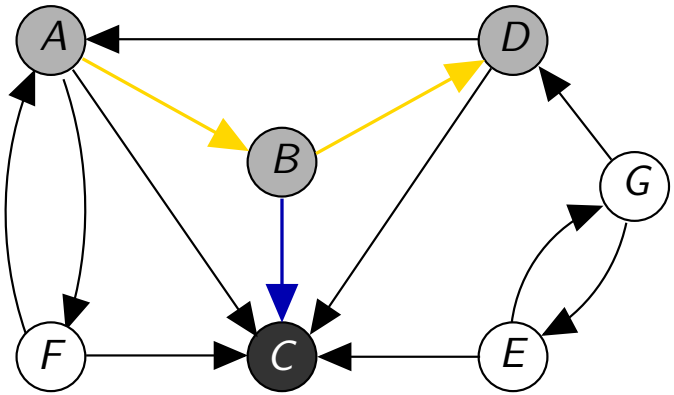


Erforsche einen Knoten



Erforsche einen Knoten



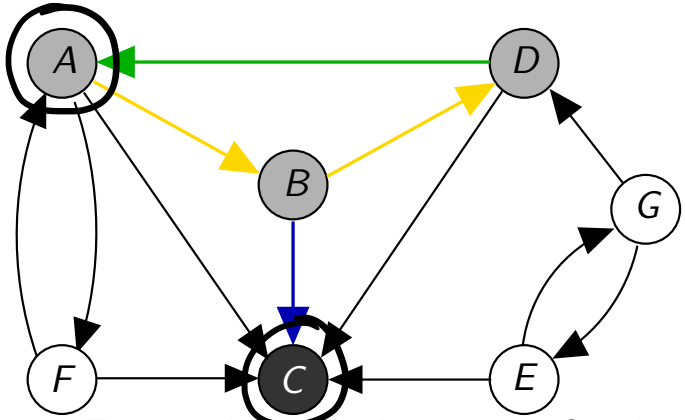


Sackgasse!

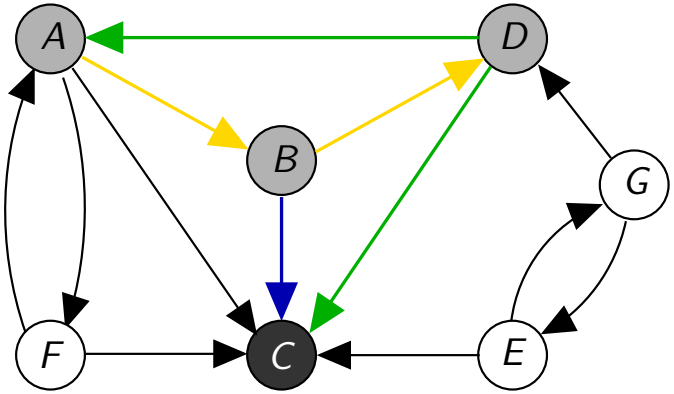
Backtracke und erforsche den nächsten Knoten

----> = backtracking

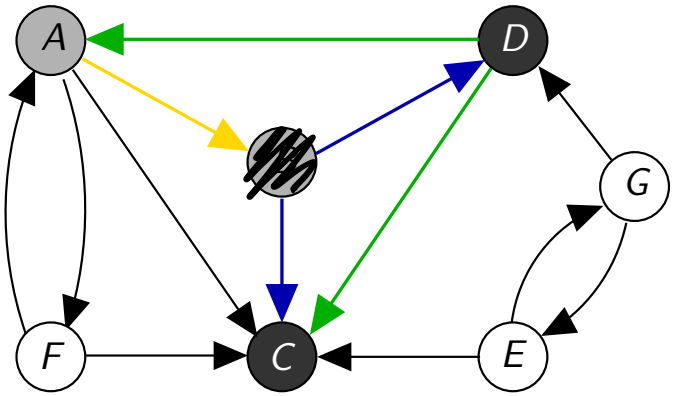
Tiefensuche: Beispiel



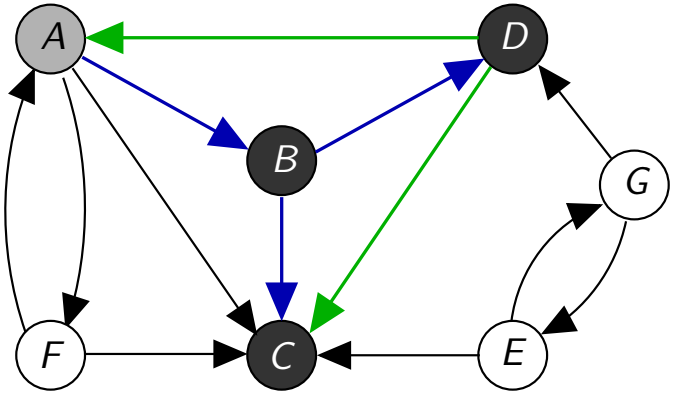
Nächster Zustand wurde bereits gefunden
Backtracke und erforsche den nächsten Knoten



Nächster Zustand wurde bereits gefunden
Backtracke und erforsche den nächsten Knoten



D ist eine Sackgasse
Backtracke und erforsche den nächsten Knoten

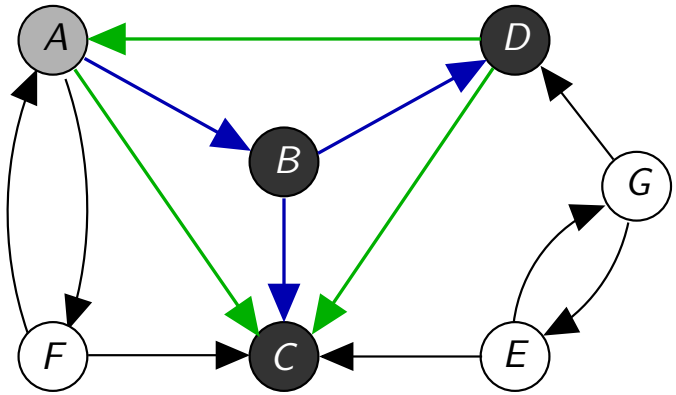


B ist eine Sackgasse
Backtracke und erforsche den nächsten Knoten

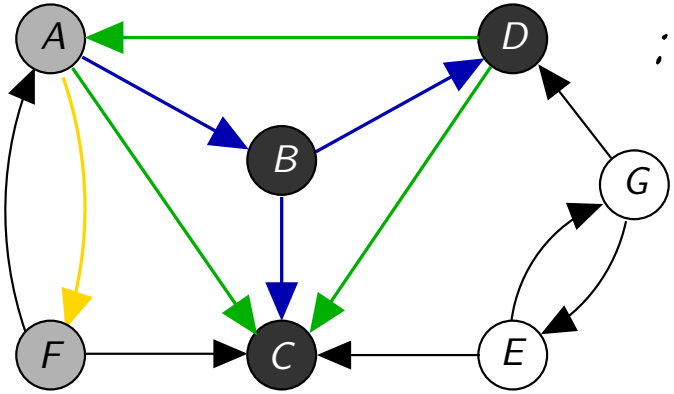
↳ nach A

A

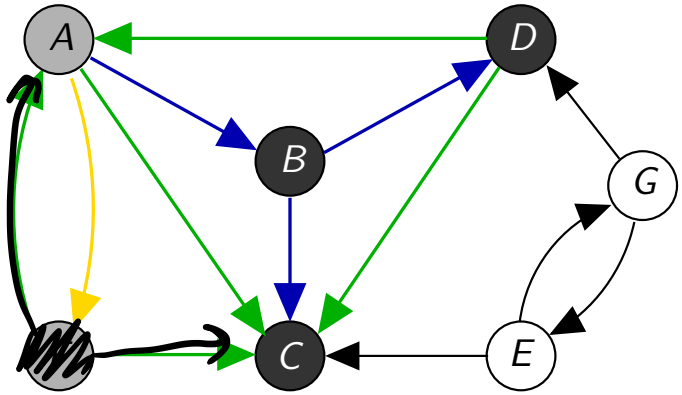
Tiefensuche: Beispiel



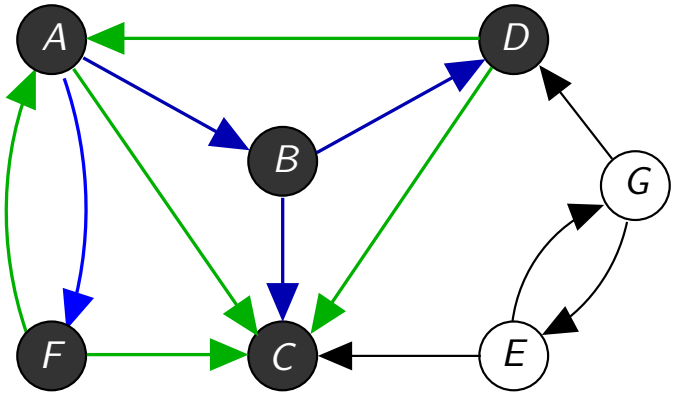
C wurde bereits gefunden
Backtracke und erforsche den nächsten Knoten



Erforsche den nächsten Knoten



Beide nächsten Knoten wurden bereits gefunden



Fertig!

Tiefensuche: Implementierung

```
1  void DFS(List adj[n], int start, int &color[n]) {
2    color[start] = GRAY; // start ist noch zu verarbeiten
3    foreach (w in adj[start]) {
4      if (color[w] == WHITE) { // neuer ("ungefundener") Knoten
5        DFS(adj, w, color);
6      }
7    }
8    color[start] = BLACK; // start ist abgeschlossen
9  }

11 void completeDFS(List adj[n], int n, int start) {
12   int color[n] = WHITE; // noch kein Knoten ist gefunden worden
13   for (int i = 0; i < n; i++)
14     if (color[i] == WHITE) DFS(adj, i, color);
15 }
```

Eigenschaften der Tiefensuche

- Erforsche einen Pfad so weit wie möglich bevor backtracking.

Eigenschaften der Tiefensuche

- Erforsche einen Pfad so weit wie möglich bevor backtracking.
- Die zu verarbeitenden Knoten werden in LIFO-Reihenfolge (last-in first-out) geprüft.

Eigenschaften der Tiefensuche

- Erforsche einen Pfad so weit wie möglich bevor backtracking.
- Die zu verarbeitenden Knoten werden in LIFO-Reihenfolge (last-in first-out) geprüft.
- Es gibt zwei „Verarbeitungsmöglichkeiten“ für einen Knoten:

Eigenschaften der Tiefensuche

- Erforsche einen Pfad so weit wie möglich bevor backtracking.
- Die zu verarbeitenden Knoten werden in LIFO-Reihenfolge (last-in first-out) geprüft.
- Es gibt zwei „Verarbeitungsmöglichkeiten“ für einen Knoten:
  1. Wenn der Knoten entdeckt wird. GRAU gefärbt

Eigenschaften der Tiefensuche

- Erforsche einen Pfad so weit wie möglich bevor backtracking.
- Die zu verarbeitenden Knoten werden in LIFO-Reihenfolge (last-in first-out) geprüft.
- Es gibt zwei „Verarbeitungsmöglichkeiten“ für einen Knoten:
  1. Wenn der Knoten entdeckt wird.
  2. Wenn der Knoten als „abgearbeitet“ markiert wird (und alle seine Nachfolger entdeckt werden).

↓ schwarz gefärbt

Eigenschaften der Tiefensuche

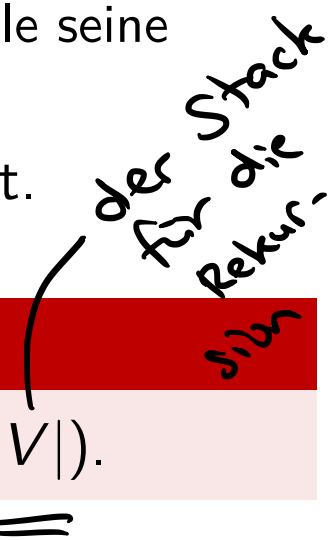
- Erforsche einen Pfad so weit wie möglich bevor backtracking.
- Die zu verarbeitenden Knoten werden in LIFO-Reihenfolge (last-in first-out) geprüft.
- Es gibt zwei „Verarbeitungsmöglichkeiten“ für einen Knoten:
  1. Wenn der Knoten entdeckt wird.
  2. Wenn der Knoten als „abgearbeitet“ markiert wird (und alle seine Nachfolger entdeckt werden).

$\Rightarrow$ Diese letztgenannte Möglichkeit macht Tiefensuche beliebt.

Eigenschaften der Tiefensuche

- Erforsche einen Pfad so weit wie möglich bevor backtracking.
- Die zu verarbeitenden Knoten werden in LIFO-Reihenfolge (last-in first-out) geprüft.
- Es gibt zwei „Verarbeitungsmöglichkeiten“ für einen Knoten:
  1. Wenn der Knoten entdeckt wird.
  2. Wenn der Knoten als „abgearbeitet“ markiert wird (und alle seine Nachfolger entdeckt werden).

$\Rightarrow$ Diese letztgenannte Möglichkeit macht Tiefensuche beliebt.



Komplexität der Tiefensuche

Die Zeitkomplexität ist in $\mathcal{O}(|V| + |E|)$, der Platzbedarf in $\Theta(|V|)$.

Nächste Vorlesung

Nächste Vorlesung

Montag 18. Juni, 08:30 (Hörsaal H01). Bis dann!

Übersicht

↓ Montag 18. Juni

Irrgärten

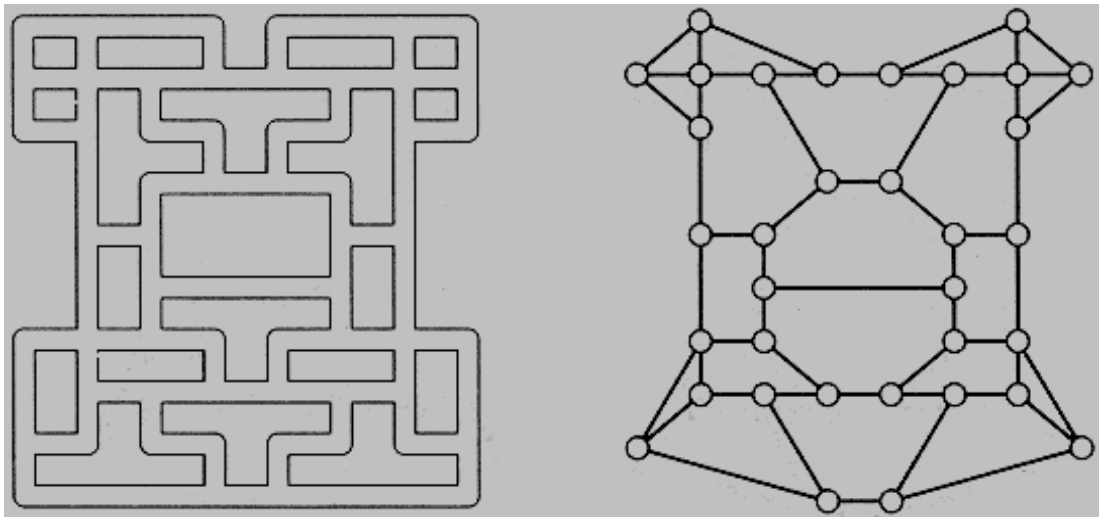
"Das eben geschieht den Menschen, die in einem Irrgarten hastig werden: Eben die Eile führt immer tiefer in die Irre."

[Lucius Annaeus Seneca (4 n. Chr. – 65 n. Chr.)]

Geschichte

- Tiefensuche wurde bereits vor Jahrhunderten formal beschrieben als ein Verfahren zum Durchqueren von Labyrinthen.
- Labyrinth als Graph:
  - Knoten: Stellen, an denen mehr als ein Weg gewählt werden kann
  - Kanten: Wege zwischen Knoten
  - Eingang: als spezieller Knoten `start`
  - Ziel: als spezieller Knoten `target`
- Erreichbarkeitsproblem:

  Ist `target` erreichbar von `start`, und wenn ja,
  wie sieht ein Pfad von `start` nach `target` aus?



Erreichbarkeitsanalyse: DFS Implementierung

```
1  bool DFS(List adj[n], int start, int &color[n],
2           int target, List path) {
3    if (start == target){
4      path.addAtFront(start); return true;
5    }
6    color[start] = GRAY;
7    foreach (w in adj[start]) {
8      if (color[w] == WHITE) {
9        if (DFS(adj, w, color, target, path)) {
10         path.addAtFront(start); return true;
11       }
12     }
13   }
14   color[start] = BLACK;
15   return false;
16 }
17 bool reach(List adj[n], int n, int start, int target,
18                    List &path) { // path ist leer
19   int color[n] = WHITE;
20   return DFS(adj, start, color, target, path);
21 }
```

$\mathcal{O}(|V|+|E|)$

Speicher

$\mathcal{O}(|V|)$

↑

stack

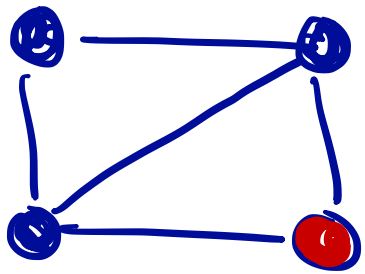
Übersicht

CCs in ungerichteten Graphen

Zusammenhangskomponenten in ungerichteten Graphen

Sei G ein ungerichteter Graph.

- G heißt zusammenhängend (connected), wenn jeder Knoten von jedem anderen Knoten aus erreichbar ist.
- Eine Zusammenhangskomponente (connected component, CC) von G ist ein maximaler (d.h. nicht erweiterbarer) zusammenhängender Teilgraph von G.



CCs in ungerichteten Graphen

Problem:

Finde die Zusammenhangskomponenten (CCs) eines ungerichteten Graphen G.

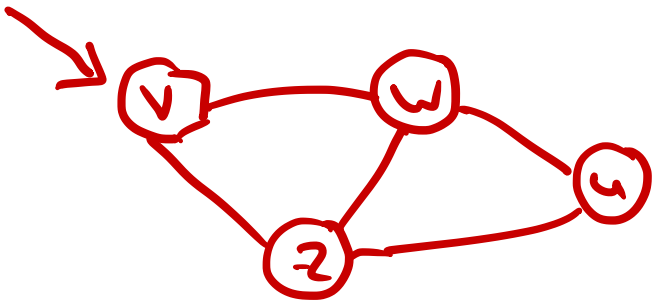
CCs in ungerichteten Graphen

Problem:

Finde die Zusammenhangskomponenten (CCs) eines ungerichteten Graphen G.

Loesung:

Finden des CCs eines Knotens v:
Verwende Tiefen- (oder Breiten)suche, um alle aus v erreichbaren Knoten zu bestimmen.



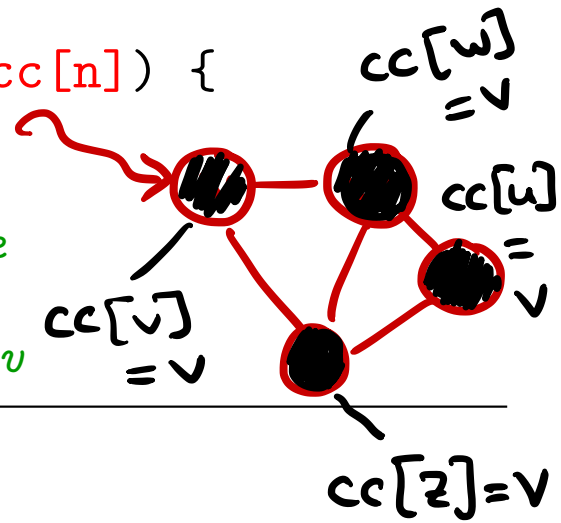
CCs in ungerichteten Graphen

```
1  void DFS(List adj[n], int start, int &color[n],
2                  int leader, int &cc[n]) {
3    color[start] = GRAY;
4    foreach (next in adj[start])
5      if (color[next] == WHITE)
6        DFS(adj, next, color, leader, cc);
7    color[start] = BLACK;
8    cc[start] = leader; // speichere das CC von start
9  }

11 void connComponents(List adj[n], int n, int &cc[n]) {
12   int color[n]= WHITE;
13   for (int v = 0; v < n; v++)
14     if (color[v] == WHITE) // weitere Komponente
15       DFS(adj, v, color, v, cc);
16 } // Ausgabe in cc: cc[u] = Komponente von Knoten u
```

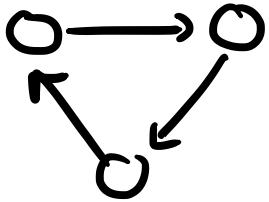
cc[v] = u

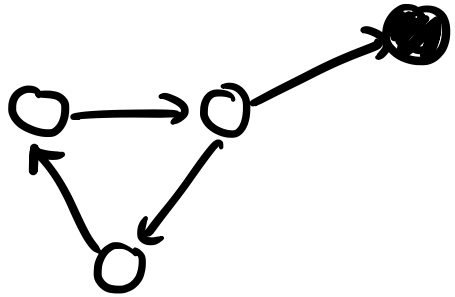
v gehört zum CC(u)



Übersicht

SCCs in gerichteten Graphen

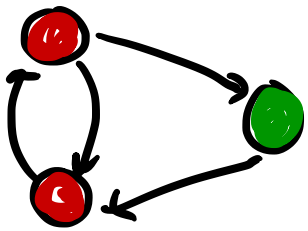




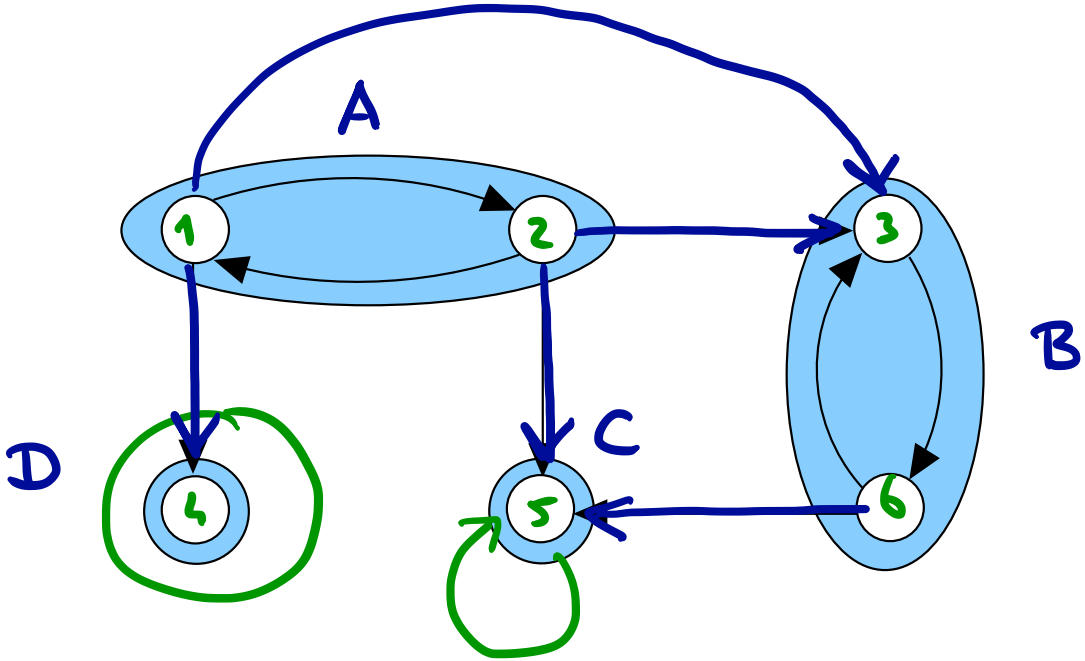
Zusammenhangskomponenten

Sei G ein gerichteter Graph.

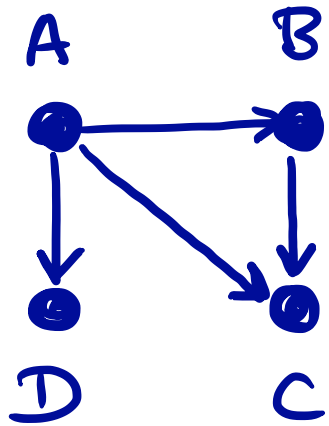
- G heißt stark zusammenhängend (strongly connected), wenn jeder Knoten von jedem anderen aus erreichbar ist.
- Eine starke Zusammenhangskomponente (strongly connected component, SCC) von G ist ein maximaler (d.h., nicht erweiterbarer) stark zusammenhängender Teilgraph von G.

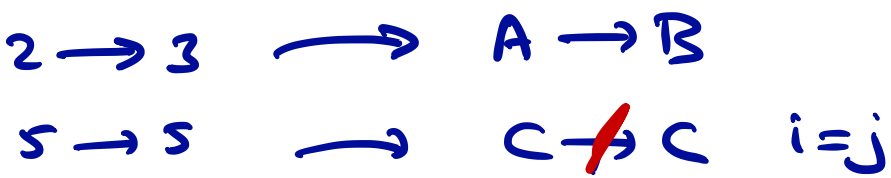


Starke Zusammenhangskomponenten (SCCs)



Ein gerichteter Graph und seine SCCs.





Kondensationsgraph

Die starken Zusammenhangskomponenten von G induzieren den Kondensationsgraph.

Kondensationsgraph

Die starken Zusammenhangskomponenten von G induzieren den Kondensationsgraph.

Kondensationsgraph

Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph mit k SCCs $S_i = (V_i, E_i)$ für $0 < i \leqslant k$.

Kondensationsgraph

Die starken Zusammenhangskomponenten von G induzieren den Kondensationsgraph.

Kondensationsgraph

Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph mit k SCCs $S_i = (V_i, E_i)$ für $0 < i \leqslant k$.

Der Kondensationsgraph $G{\downarrow} = (V', E')$ ist definiert als:

- $V' = \{ V_1, \ldots, V_k \}$.

k sccs

Kondensationsgraph

Die starken Zusammenhangskomponenten von G induzieren den Kondensationsgraph.

Kondensationsgraph

Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph mit k SCCs $S_i = (V_i, E_i)$ für $0 < i \leqslant k$.

Der Kondensationsgraph $G{\downarrow} = (V', E')$ ist definiert als:

- $V' = \{ V_1, \ldots, V_k \}$.
- $(V_i, V_j) \in E'$ gdw. $i \neq j$ und es gibt $(v, w) \in E$ mit $v \in V_i$ und $w \in V_j$.

Kondensationsgraph

Die starken Zusammenhangskomponenten von G induzieren den Kondensationsgraph.

Kondensationsgraph

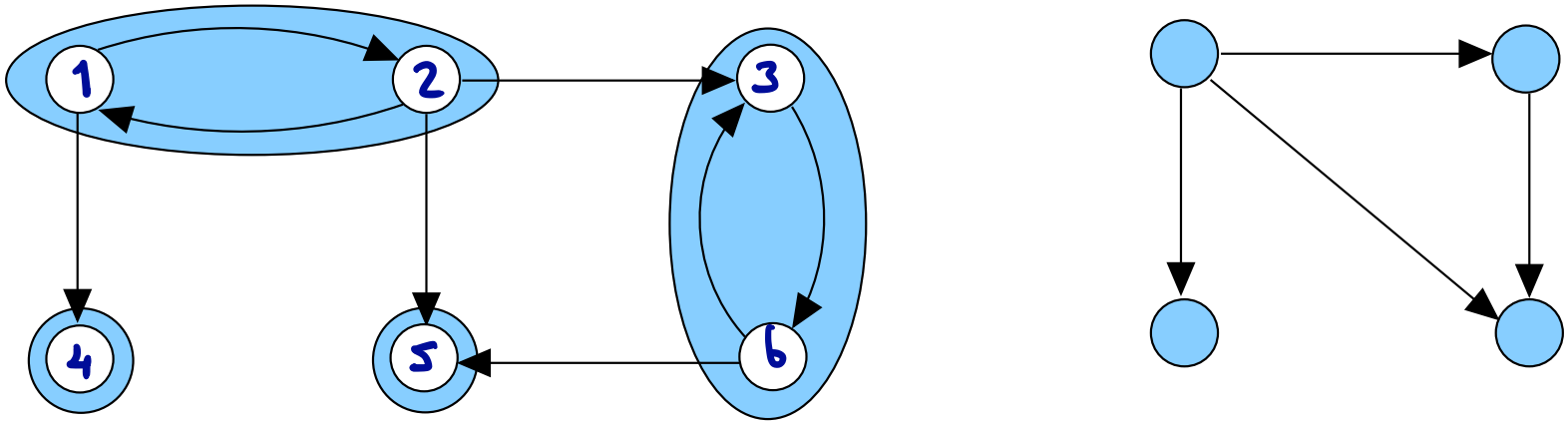
Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph mit k SCCs $S_i = (V_i, E_i)$ für $0 < i \leqslant k$.

Der Kondensationsgraph $G{\downarrow} = (V', E')$ ist definiert als:

- $V' = \{ V_1, \ldots, V_k \}$.
- $(V_i, V_j) \in E'$ gdw. $i \neq j$ und es gibt $(v, w) \in E$ mit $v \in V_i$ und $w \in V_j$.

Der Kondensationsgraph $G{\downarrow}$ ist azyklisch.

Kondensationsgraph: Beispiel



Ein gerichteter Graph G und seine Kondensation $G{\downarrow}$.

SCCs und Transponierung

Transponieren

Der transponierte Graph von $G = (V, E)$ ist $G^T = (V, E')$ mit $(v, w) \in E'$ gdw. $(w, v) \in E$.

In G^T ist die Richtung der Kanten von G gerade umgedreht.

SCCs und Transponierung

Transponieren

Der transponierte Graph von $G = (V, E)$ ist $G^T = (V, E')$ mit $(v, w) \in E'$ gdw. $(w, v) \in E$.

In G^T ist die Richtung der Kanten von G gerade umgedreht.

Lemma: Beziehung zwischen G und G^T

SCCs und Transponierung

Transponieren

Der transponierte Graph von $G = (V, E)$ ist $G^T = (V, E')$ mit $(v, w) \in E'$ gdw. $(w, v) \in E$.

In G^T ist die Richtung der Kanten von G gerade umgedreht.

Lemma: Beziehung zwischen G und G^T

1. Die SCCs von G und G^T sind die selben.

SCCs und Transponierung

Transponieren

Der transponierte Graph von $G = (V, E)$ ist $G^T = (V, E')$ mit $(v, w) \in E'$ gdw. $(w, v) \in E$.

In G^T ist die Richtung der Kanten von G gerade umgedreht.

Lemma: Beziehung zwischen G und G^T

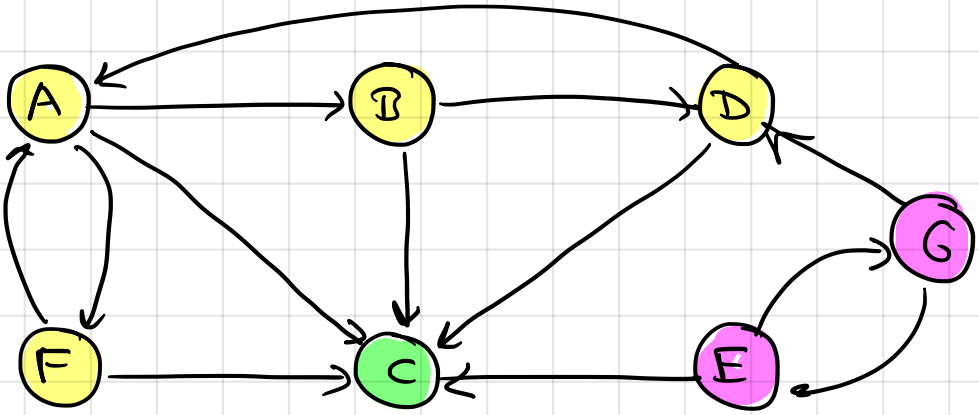
1. Die SCCs von G und G^T sind die selben.
2. Die Kondensation und die Transposition kommutieren, d. h.:

$$(G\downarrow)^T = (G^T)\downarrow$$

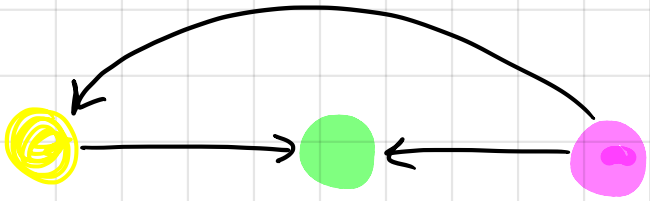
erst kondensieren, dann transp.

$(G\downarrow)^T$

G

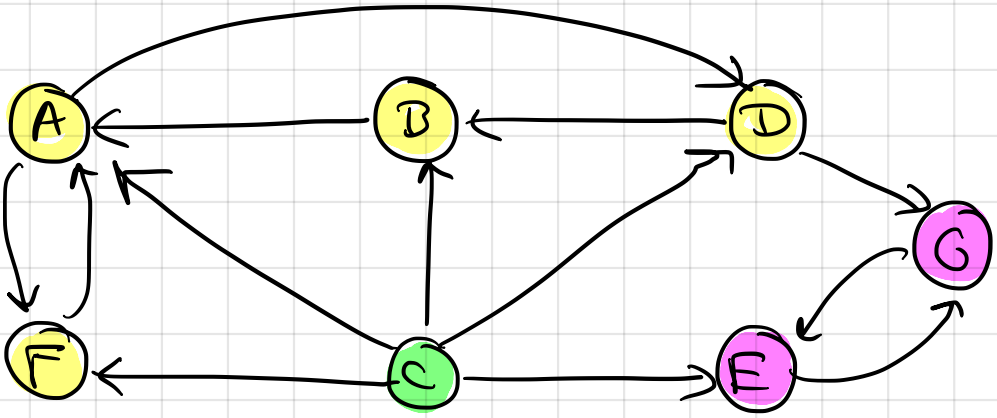


$G\downarrow$

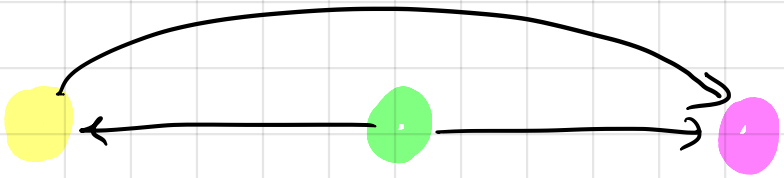


(*) azyklisch

G^T



$(G^T)\downarrow$



$= (G\downarrow)^T$

Algorithmus zum Finden von SCCs

Der Kosaraju-Sharir Algorithmus findet SCCs in ~~zwei~~ drei Phasen:

Algorithmus zum Finden von SCCs

Der Kosaraju-Sharir Algorithmus findet SCCs in ~~zwei~~ drei Phasen:

1. Führe ein DFS auf G durch, wobei alle Knoten beim Abschließen (d. h. wenn der Knoten `BLACK` gefärbt wird) auf einem Stack S gespeichert werden.

Algorithmus zum Finden von SCCs

Der Kosaraju-Sharir Algorithmus findet SCCs in ~~zwei~~ drei Phasen:

1. Führe ein DFS auf G durch, wobei alle Knoten beim Abschließen (d. h. wenn der Knoten `BLACK` gefärbt wird) auf einem Stack S gespeichert werden.
2. Färbe alle Knoten wieder `WHITE`.

Algorithmus zum Finden von SCCs

Der Kosaraju-Sharir Algorithmus findet SCCs in ~~zwei~~ drei Phasen:

1. Führe ein DFS auf G durch, wobei alle Knoten beim Abschließen (d. h. wenn der Knoten `BLACK` gefärbt wird) auf einem Stack S gespeichert werden.
2. Färbe alle Knoten wieder `WHITE`.
3. Wiederhole solange der Stack S noch weiße Knoten enthält:
   - Wähle den obersten noch weißen (Leiter-)Knoten v vom S.

Algorithmus zum Finden von SCCs

Der Kosaraju-Sharir Algorithmus findet SCCs in ~~zwei~~ drei Phasen:

1. Führe ein DFS auf G durch, wobei alle Knoten beim Abschließen (d. h. wenn der Knoten `BLACK` gefärbt wird) auf einem Stack S gespeichert werden.
2. Färbe alle Knoten wieder `WHITE`.
3. Wiederhole solange der Stack S noch weiße Knoten enthält:
   - Wähle den obersten noch weißen (Leiter-)Knoten v vom S.
   - Führe ein DFS mit Startknoten v auf dem transponierten Graphen G^T aus und speichere für jeden besuchten Knoten den Leiterknoten v als Repräsentanten seines SCCs.

Algorithmus zum Finden von SCCs

Der Kosaraju-Sharir Algorithmus findet SCCs in ~~zwei~~ drei Phasen:

1. Führe ein DFS auf G durch, wobei alle Knoten beim Abschließen (d. h. wenn der Knoten `BLACK` gefärbt wird) auf einem Stack S gespeichert werden.
2. Färbe alle Knoten wieder `WHITE`.
3. Wiederhole solange der Stack S noch weiße Knoten enthält:
   - Wähle den obersten noch weißen (Leiter-)Knoten v vom S.
   - Führe ein DFS mit Startknoten v auf dem transponierten Graphen G^T aus und speichere für jeden besuchten Knoten den Leiterknoten v als Repräsentanten seines SCCs.

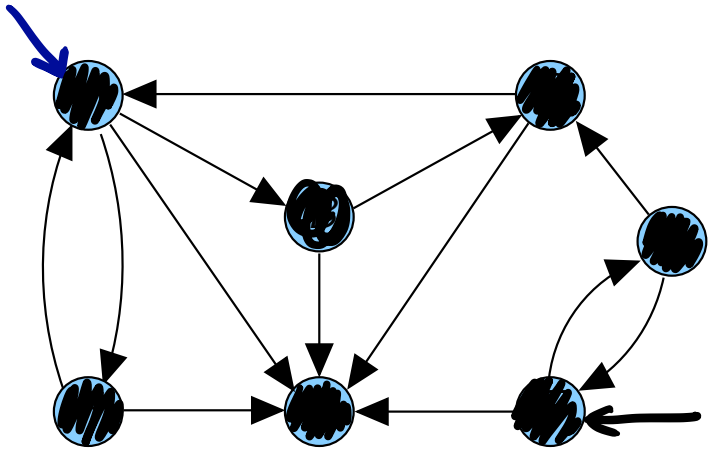
Leiter einer SCC

Ein Knoten v heißt Leiter (leader), wenn er als letzter Knoten aus seinem SCC bei einer DFS `BLACK` gefärbt wird.

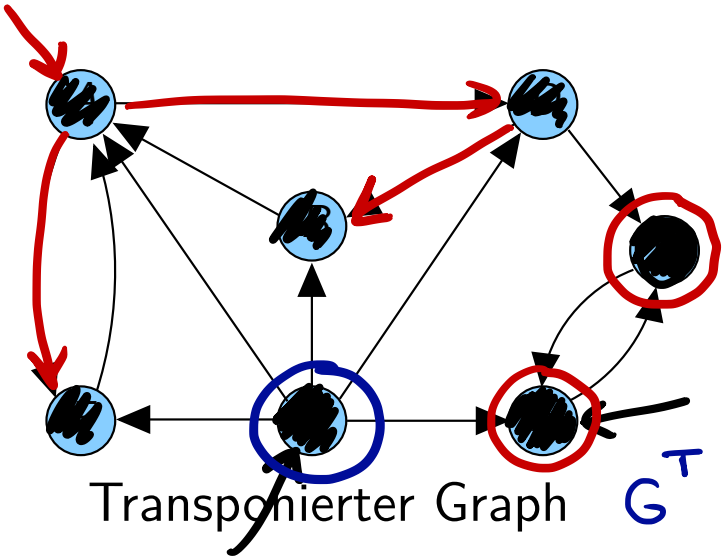
```
1  void DFS1(List adj[n], int start, int &color[n], Stack &S) {
2    color[start] = GRAY;
3    foreach (w in adj[start])
4      if (color[w] == WHITE) DFS1(adj, w, color, S);
5    color[start] = BLACK; S.push(start);  // speichere auf Stack S
6  }
7  void DFS2(List adj[n], int start, int &color[n], int leader,
8            int &scc[n]) {
9    color[start] = GRAY;
10   foreach (w in adj[start])
11     if (color[w] == WHITE) DFS2(adj, w, color, leader, scc);
12   color[start] = BLACK; scc[start] = leader;
13 }
14 void kosaraju-sharir(List adj[n], int n) {
15   int color[n] = WHITE; Stack S; int scc[n];
16   for (int i = 0; i < n; i++) // Phase 1
17     if (color[i] == WHITE) DFS1(adj, i, color, S);
18   List adj_T = adj^T; // Transponiere
19   for (int i = 0; i < n; i++) color[i] = WHITE; // Phase 2
20   while (!S.empty()){ // Phase 3
21     int v = S.pop();
22     if (color[v] == WHITE) DFS2(adj_T, v, color, v, scc);
23   }
24 }
```

① ② ③

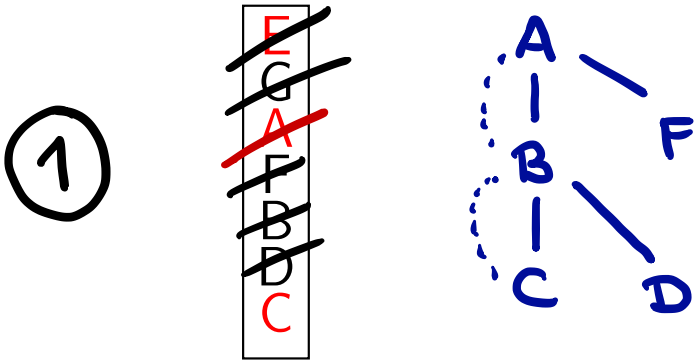
Kosaraju-Sharir Algorithmus: Beispiel



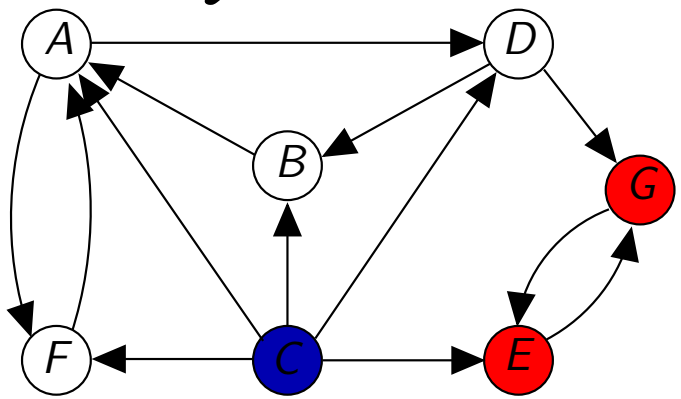
Ursprünglicher Digraph G



Transponierter Graph G^T

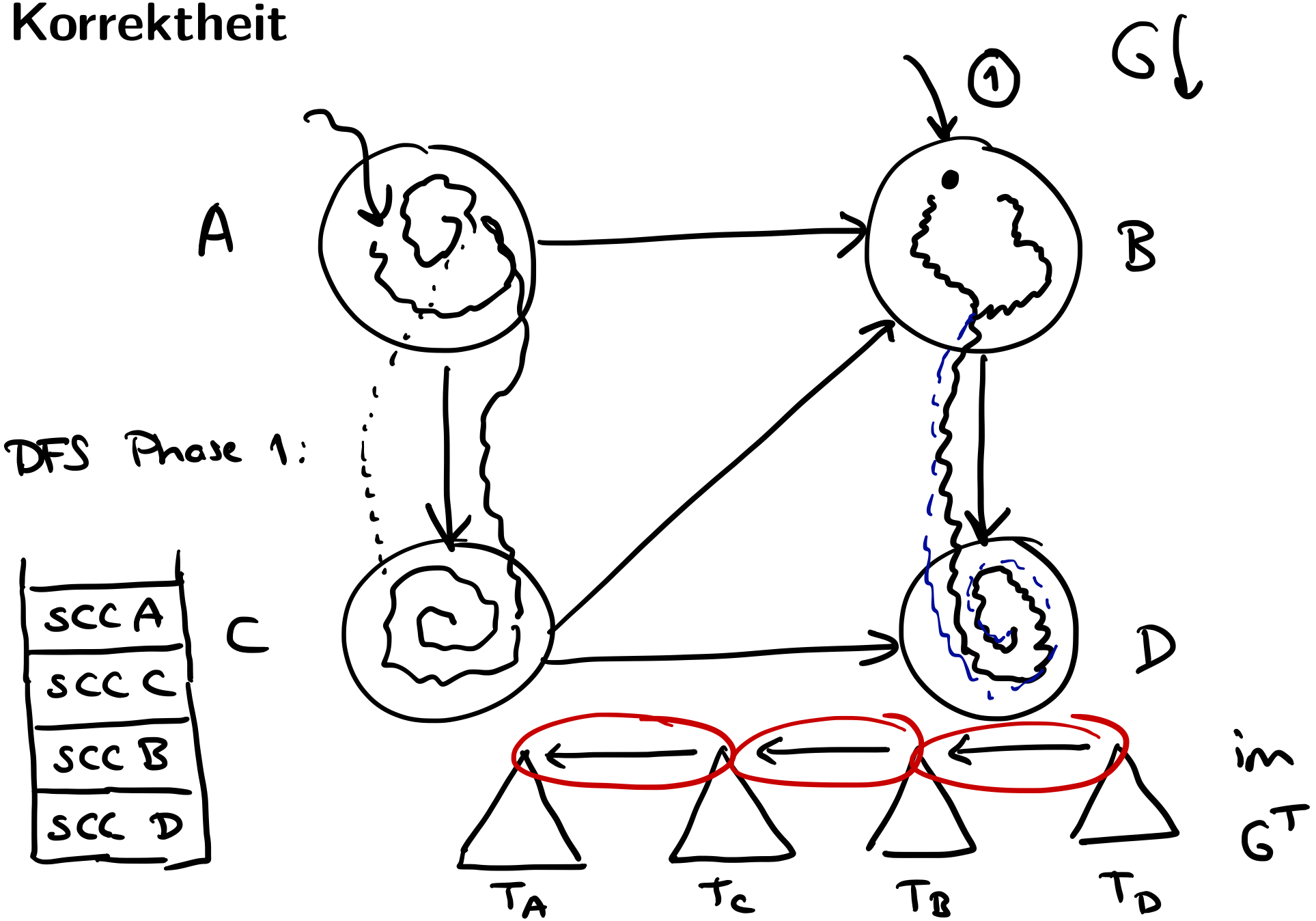


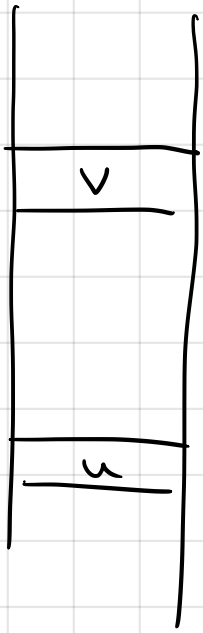
Stack am Ende der Phase 1



In Phase 2 gefundene starke Komponenten

Korrektheit





Stapel
nach 1. DFS

1. v und u im gleichen SCC

$scc[v] = scc[u]$

die Suche in G^T findet u, da im SCC alle Knoten in G^T miteinander verbunden sind.

2. $scc[u] \neq scc[v]$

SCC von v aus in G^T u nicht erreichen

weil SCC (u) is <u>nicht erreichbar</u> aus SCC(v)

Komplexität

Zeitkomplexität

Die Worst-Case Zeitkomplexität vom Kosaraju-Sharir Algorithmus zum Finden von SCCs in einem gerichteten Graphen ist in $\Theta(|V| + |E|)$.

Komplexität

Zeitkomplexität

Die Worst-Case Zeitkomplexität vom Kosaraju-Sharir Algorithmus zum Finden von SCCs in einem gerichteten Graphen ist in $\Theta(|V| + |E|)$.
Seine Speicherkomplexität ist in $\Theta(|V|)$.

Komplexität

Zeitkomplexität

Die Worst-Case Zeitkomplexität vom Kosaraju-Sharir Algorithmus zum Finden von SCCs in einem gerichteten Graphen ist in $\Theta(|V| + |E|)$.
Seine Speicherkomplexität ist in $\Theta(|V|)$.

Beweis

Komplexität

Zeitkomplexität

Die Worst-Case Zeitkomplexität vom Kosaraju-Sharir Algorithmus zum Finden von SCCs in einem gerichteten Graphen ist in $\Theta(|V| + |E|)$.
Seine Speicherkomplexität ist in $\Theta(|V|)$.

Beweis

- Die DFS über G und G^T benötigen jeweils $\Theta(|V| + |E|)$.

Komplexität

Zeitkomplexität

Die Worst-Case Zeitkomplexität vom Kosaraju-Sharir Algorithmus zum Finden von SCCs in einem gerichteten Graphen ist in $\Theta(|V| + |E|)$.
Seine Speicherkomplexität ist in $\Theta(|V|)$.

Beweis

- Die DFS über G und G^T benötigen jeweils $\Theta(|V| + |E|)$.
- Der transponierte Graph G^T kann in $\Theta(|V| + |E|)$ gebildet werden.

Komplexität

Zeitkomplexität

Die Worst-Case Zeitkomplexität vom Kosaraju-Sharir Algorithmus zum Finden von SCCs in einem gerichteten Graphen ist in $\Theta(|V| + |E|)$.
Seine Speicherkomplexität ist in $\Theta(|V|)$.

Beweis

- Die DFS über G und G^T benötigen jeweils $\Theta(|V| + |E|)$.
- Der transponierte Graph G^T kann in $\Theta(|V| + |E|)$ gebildet werden.
- Der Stack benötigt $\Theta(|V|)$ Speicher.

Übersicht

Gerichtete azyklische Graphen

digraph

Gerichtete azyklische Graphen

Gerichtete azyklische Graphen (directed acyclic graph, DAG) sind wichtig:

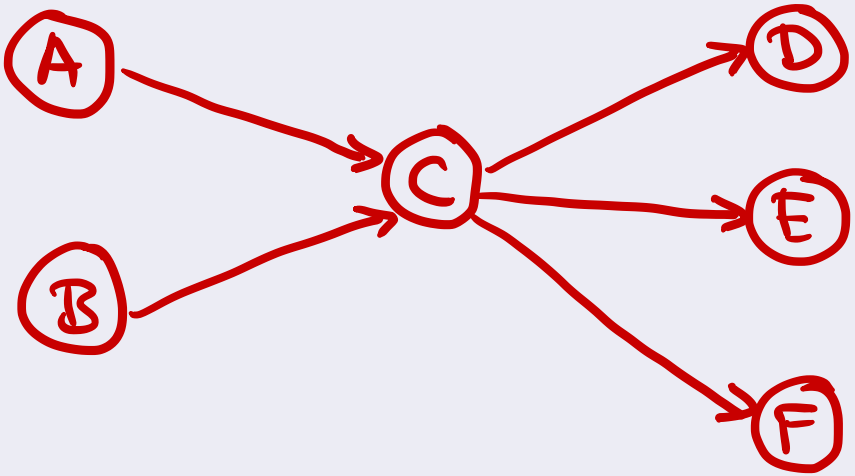
- Viele Probleme lassen sich naturgemäß mit Hilfe von DAGs formulieren.

Gerichtete azyklische Graphen

Gerichtete azyklische Graphen

Gerichtete azyklische Graphen (directed acyclic graph, DAG) sind wichtig:

- Viele Probleme lassen sich naturgemäß mit Hilfe von DAGs formulieren.
  - Scheduling: Vorranggraphen beschreiben, welche Aufgaben erledigt sein müssen, bevor ein nachfolgender Schritt beginnen kann.



Gerichtete azyklische Graphen

Gerichtete azyklische Graphen

Gerichtete azyklische Graphen (directed acyclic graph, DAG) sind wichtig:

- Viele Probleme lassen sich naturgemäß mit Hilfe von DAGs formulieren.
  - Scheduling: Vorranggraphen beschreiben, welche Aufgaben erledigt sein müssen, bevor ein nachfolgender Schritt beginnen kann.
  - Ein Zyklus in solch einem Vorranggraphen wäre ein Deadlock.

Gerichtete azyklische Graphen

Gerichtete azyklische Graphen

Gerichtete azyklische Graphen (directed acyclic graph, DAG) sind wichtig:

- Viele Probleme lassen sich naturgemäß mit Hilfe von DAGs formulieren.
  - Scheduling: Vorranggraphen beschreiben, welche Aufgaben erledigt sein müssen, bevor ein nachfolgender Schritt beginnen kann.
  - Ein Zyklus in solch einem Vorranggraphen wäre ein Deadlock.
- Viele Probleme haben auf DAGs eine niedrigere Komplexität als auf (möglichst zyklische) gerichtete Graphen.

Gerichtete azyklische Graphen

Gerichtete azyklische Graphen

Gerichtete azyklische Graphen (directed acyclic graph, DAG) sind wichtig:

- Viele Probleme lassen sich naturgemäß mit Hilfe von DAGs formulieren.
  - Scheduling: Vorranggraphen beschreiben, welche Aufgaben erledigt sein müssen, bevor ein nachfolgender Schritt beginnen kann.
  - Ein Zyklus in solch einem Vorranggraphen wäre ein Deadlock.
- Viele Probleme haben auf DAGs eine niedrigere Komplexität als auf (möglichst zyklische) gerichtete Graphen.
- Ein DAG entspricht einer partiellen Ordnung $<$ auf den Knoten:
  - Eine Kante (v, w) besagt: $v > w$.

  $\Rightarrow$ Da eine partielle Ordnung anti-symmetrisch ist, kann sie keinen Zyklus enthalten.

Sei M eine Menge, $\leq \subseteq M \times M$

ist eine <u>Halbordnung</u> auf M wenn

a. $\forall x \in M.$ $\quad x \leq x$ reflexiv

b. $\forall x, y \in M.$ $\quad x \leq y$ und $y \leq x$

$\Longrightarrow \quad x = y$ anti-symmetrie

c $\forall x, y, z \in M.$ transitivität

$x \leq y$ und $y \leq z \Longrightarrow x \leq z$

<u>Satz:</u> jede <u>endliche</u> Halbordnung kann in eine (totale) Ordnung eingebettet werden.

<u>Beweis</u>: sei $\leq \subseteq M \times M$ eine Halbordnung

M ist endlich.

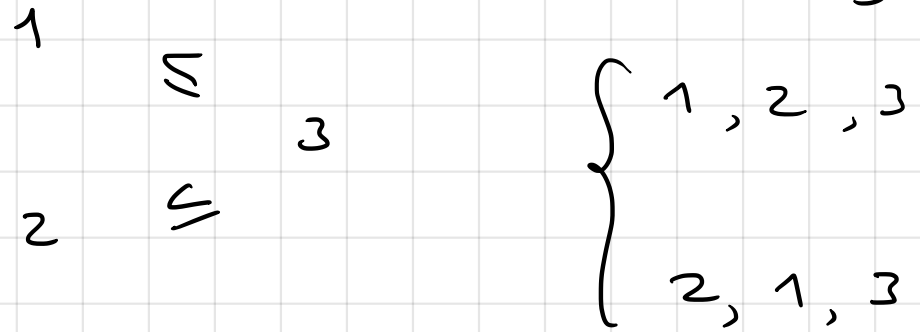
Da M endlich ist, gibt es $x \in M$, sodaß

$\neg \left(\exists_{\substack{y \neq x \\ y \in M}} \; . \; y \leq x \right)$

Nimm x als kleinstes Element

$M \setminus \{x\}$ weiter $\longrightarrow$ Ordnung

Einbettung



$$\begin{cases} 1, 2, 3 \\ 2, 1, 3 \end{cases}$$

Halbordnungen

Gerichtete azyklische Graphen

Gerichtete azyklische Graphen

Gerichtete azyklische Graphen (directed acyclic graph, DAG) sind wichtig:

- Viele Probleme lassen sich naturgemäß mit Hilfe von DAGs formulieren.
  - Scheduling: Vorranggraphen beschreiben, welche Aufgaben erledigt sein müssen, bevor ein nachfolgender Schritt beginnen kann.
  - Ein Zyklus in solch einem Vorranggraphen wäre ein Deadlock.
- Viele Probleme haben auf DAGs eine niedrigere Komplexität als auf (möglichst zyklische) gerichtete Graphen.
- Ein DAG entspricht einer partiellen Ordnung $<$ auf den Knoten:
  - Eine Kante (v, w) besagt: $v > w$.

  $\Rightarrow$ Da eine partielle Ordnung anti-symmetrisch ist, kann sie keinen Zyklus enthalten.

- Wir betrachten: Topologische Sortierung und Kritische-Pfad-Analyse.

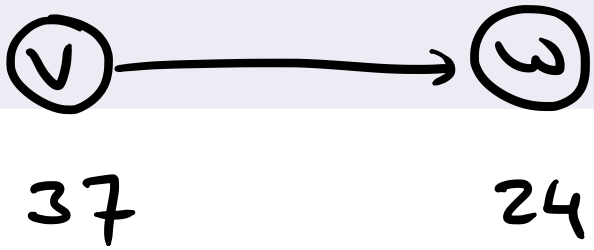
Topologische Ordnung

Topologische Ordnung

Topologische Ordnung

Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph mit n Knoten. Eine topologische Ordnung von G ist eine Zuordnung $topo : V \to \{1, \ldots, n\}$, so dass:

für jede Kante $(v, w) \in E$ gilt: $topo(v) > topo(w)$.



Topologische Ordnung

Topologische Ordnung

Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph mit n Knoten. Eine topologische Ordnung von G ist eine Zuordnung $topo : V \to \{1, \ldots, n\}$, so dass:

$$\text{für jede Kante } (v, w) \in E \text{ gilt: } topo(v) > topo(w).$$

$topo(v)$ heißt der topologische Zahl von v.

Topologische Ordnung

Topologische Ordnung

Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph mit n Knoten. Eine topologische Ordnung von G ist eine Zuordnung $topo : V \to \{1, \ldots, n\}$, so dass:

$$\text{für jede Kante } (v, w) \in E \text{ gilt: } topo(v) > topo(w).$$

$topo(v)$ heißt der topologische Zahl von v.

Lemma

Topologische Ordnung

Topologische Ordnung

Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph mit n Knoten. Eine topologische Ordnung von G ist eine Zuordnung $topo : V \to \{1, \ldots, n\}$, so dass:

$$\text{für jede Kante } (v, w) \in E \text{ gilt: } topo(v) > topo(w).$$

$topo(v)$ heißt der topologische Zahl von v.

Lemma

1. Für einen Digraph G mit einem Zyklus existiert keine topologische Ordnung.

Topologische Ordnung

Topologische Ordnung

Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph mit n Knoten. Eine topologische Ordnung von G ist eine Zuordnung $topo : V \to \{1, \ldots, n\}$, so dass:

$$\text{für jede Kante } (v, w) \in E \text{ gilt: } topo(v) > topo(w).$$

$topo(v)$ heißt der topologische Zahl von v.

Lemma

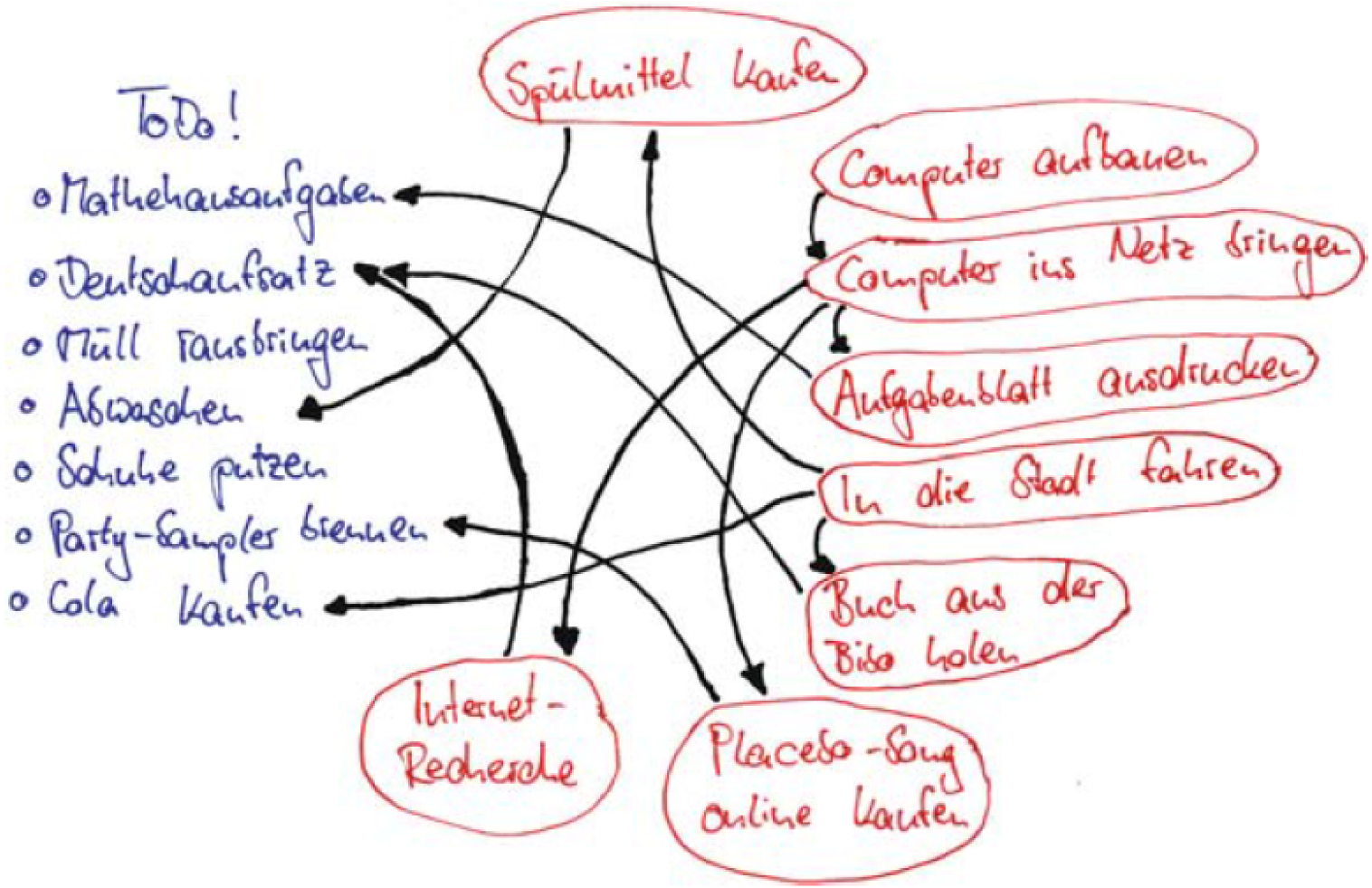
1. Für einen Digraph G mit einem Zyklus existiert keine topologische Ordnung.
2. Jeder DAG G dagegen hat mindestens eine topologische Ordnung.

lemma

Topologische Sortierung: Beispiel 1

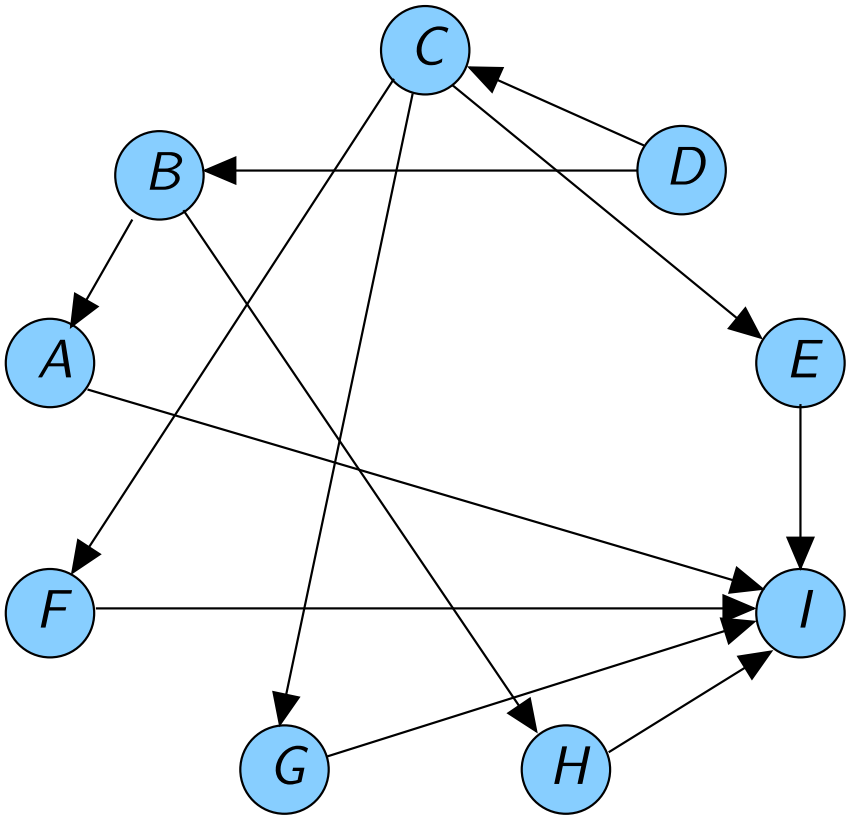
Quelle: `http://www-i1.informatik.rwth-aachen.de/~algorithmus/algo8.php`

Topologische Sortierung: Beispiel 1



Quelle: `http://www-i1.informatik.rwth-aachen.de/~algorithmus/algo8.php`

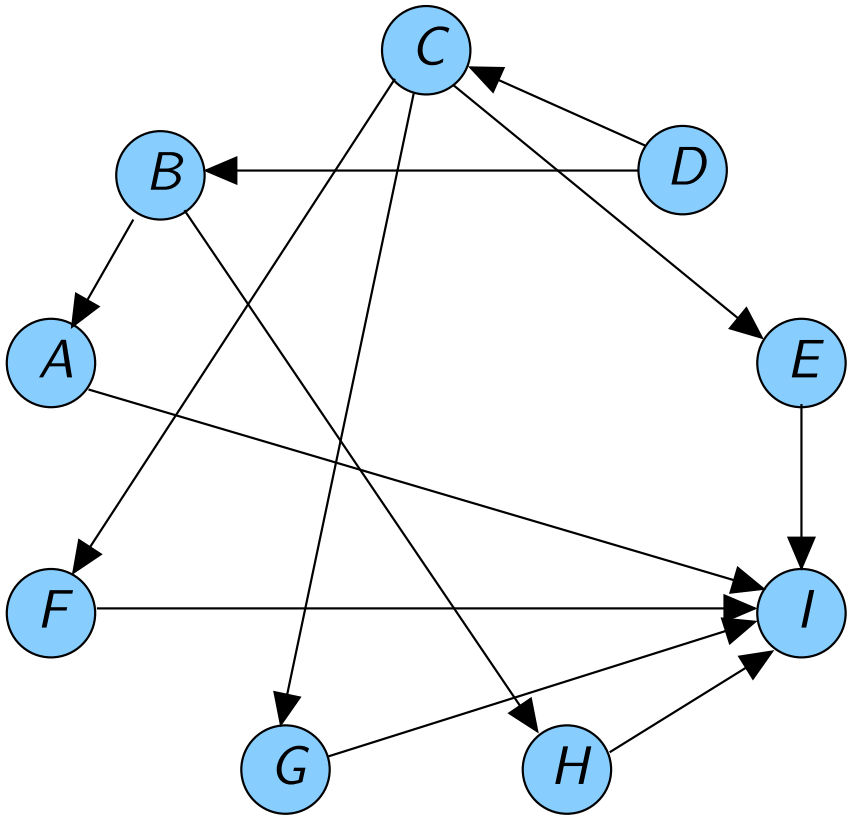
Topologische Sortierung: Beispiel 2



Abhängigkeitsgraph G^T

Nr	Aufgabe	Hängt ab von
A	choose clothes	I
B	dress	A, H
C	eat breakfast	E, F, G
D	leave	B, C
E	make coffee	I
F	make toast	I
G	pour juice	I
H	shower	I
I	wake up	–

Topologische Sortierung: Beispiel 2



Nr	Aufgabe	Hängt ab von
A	choose clothes	I
B	dress	A, H
C	eat breakfast	E, F, G
D	leave	B, C
E	make coffee	I
F	make toast	I
G	pour juice	I
H	shower	I
I	wake up	–

Abhängigkeitsgraph

- Gibt es einen Schedule für dieses Problem? D. h. kann man eine Reihenfolge finden, um alle Aufgaben ausführen zu können?

Topologische Sortierung: Implementierung

```
1  void DFS(List adj[n], int start, int &color[n],
2                  int &topoNum, int &topo[n]) {
3    color[start] = GRAY;
4    foreach (next in adj[start]) {
5      // if (color[next] == GRAY) throw "Graph ist zyklisch";
6      if (color[next] == WHITE) {
7        DFS(adj, next, color, topoNum, topo);
8      }
9    }
10   topo[start] = ++topoNum;
11   color[start] = BLACK;
12 }

14 // Ausgabe der topologischen Zahl von Knoten v in topo[v]
15 void topoSort(List adj[n], int n, int &topo[n]) {
16   int color[n] = WHITE, topoNum = 0;
17   for (int v = 0; v < n; v++)
18     if (color[v] == WHITE)
19       DFS(adj, v, color, topoNum, topo);
20 }
```

Adj Liste von G

- ✓ A → I
- ✓ B → A, H
- ✓ C → E, F, G
- D → B, C
- ✓ E → I
- ✓ F → I
- ✓ G → I
- ✓ H → I
- ✓ I → null

Tiefensuchwald

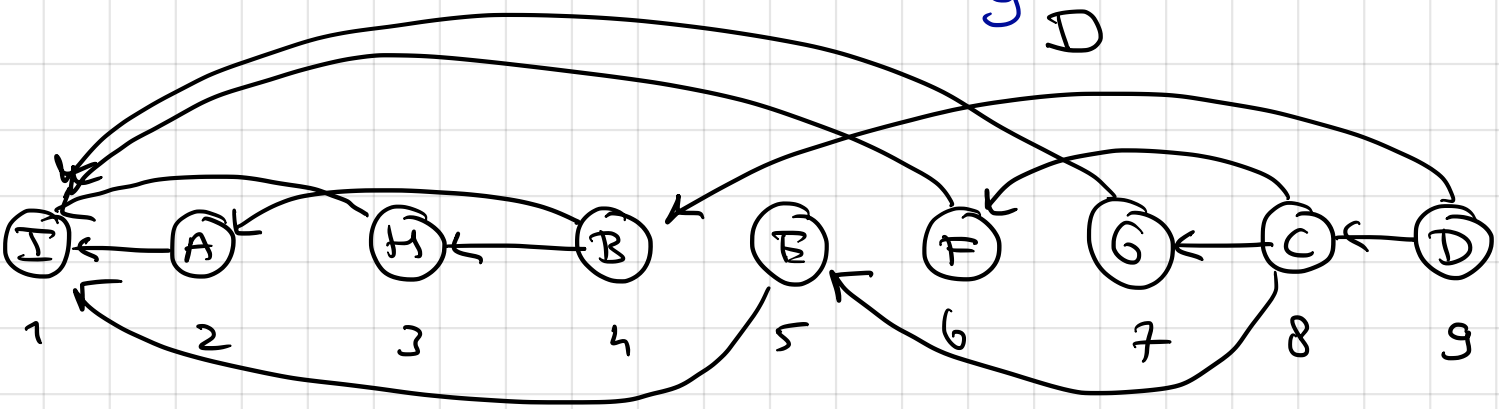
topo

2 A — 1 I

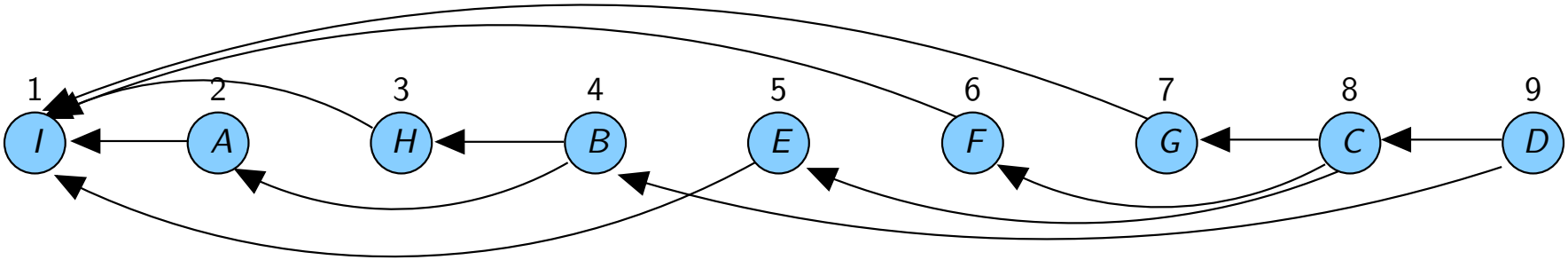
4 B — 3 H

C 8 — 5 E, 6 F, 7 G

9 D



Topologische Sortierung: Ergebnis Beispiel 2



I	A	H	B	E	F	G	C	D
wake up	choose clothes	shower	dress	make coffee	make toast	pour juice	eat breakf	leave

Abhängigkeitsgraph, der topologischen Ordnung entsprechend gezeichnet.

Korrektheit und Komplexität

Theorem

Der Algorithmus terminiert, und wenn er terminiert enthält das Array `topo` eine topologische Ordnung von ~~Digraph~~ DAG G.

Korrektheit und Komplexität

Theorem

Der Algorithmus terminiert, und wenn er terminiert enthält das Array `topo` eine topologische Ordnung von Digraph G.

Beweis:

Korrektheit und Komplexität

Theorem

Der Algorithmus terminiert, und wenn er terminiert enthält das Array `topo` eine topologische Ordnung von Digraph G.

Beweis:

1. Die DFS besucht jeden Knoten, daher sind die Zahlen in dem Array `topo` alle verschieden im Bereich 1 bis $|V|$.

Korrektheit und Komplexität

Theorem

Der Algorithmus terminiert, und wenn er terminiert enthält das Array `topo` eine topologische Ordnung von Digraph G.

Beweis:

1. Die DFS besucht jeden Knoten, daher sind die Zahlen in dem Array `topo` alle verschieden im Bereich 1 bis $|V|$.
2. Sei $(v, w) \in E$.

Korrektheit und Komplexität

Theorem

Der Algorithmus terminiert, und wenn er terminiert enthält das Array `topo` eine topologische Ordnung von Digraph G.

Beweis:

1. Die DFS besucht jeden Knoten, daher sind die Zahlen in dem Array `topo` alle verschieden im Bereich 1 bis $|V|$.
2. Sei $(v, w) \in E$.
   - w ist kein Vorgänger von v im DFS-Baum, sonst wäre G zyklisch.

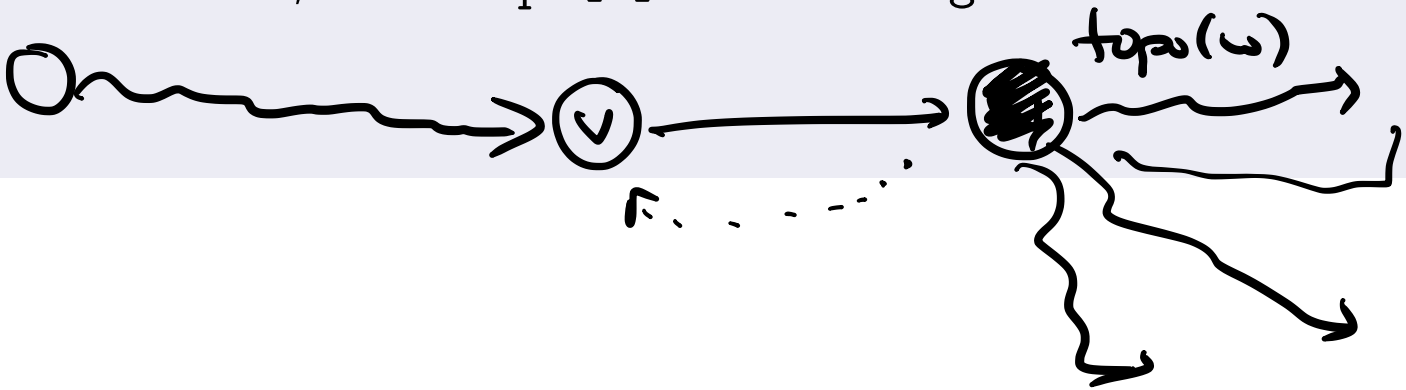
Korrektheit und Komplexität

Theorem

Der Algorithmus terminiert, und wenn er terminiert enthält das Array `topo` eine topologische Ordnung von Digraph G.

Beweis:

1. Die DFS besucht jeden Knoten, daher sind die Zahlen in dem Array `topo` alle verschieden im Bereich 1 bis $|V|$.
2. Sei $(v, w) \in E$.
   - w ist kein Vorgänger von v im DFS-Baum, sonst wäre G zyklisch.
   - Daher ist w `BLACK`, wenn `topo[v]` ein Wert zugewiesen wird.



Korrektheit und Komplexität

Theorem

Der Algorithmus terminiert, und wenn er terminiert enthält das Array `topo` eine topologische Ordnung von Digraph G.

Beweis:

1. Die DFS besucht jeden Knoten, daher sind die Zahlen in dem Array `topo` alle verschieden im Bereich 1 bis $|V|$.
2. Sei $(v, w) \in E$.
   - w ist kein Vorgänger von v im DFS-Baum, sonst wäre G zyklisch.
   - Daher ist w `BLACK`, wenn `topo[v]` ein Wert zugewiesen wird.
   - Also wurde `topo[w]` schon vorher ein Wert zugewiesen.

Korrektheit und Komplexität

Theorem

Der Algorithmus terminiert, und wenn er terminiert enthält das Array `topo` eine topologische Ordnung von Digraph G.

Beweis:

1. Die DFS besucht jeden Knoten, daher sind die Zahlen in dem Array `topo` alle verschieden im Bereich 1 bis $|V|$.
2. Sei $(v, w) \in E$.
   - w ist kein Vorgänger von v im DFS-Baum, sonst wäre G zyklisch.
   - Daher ist w `BLACK`, wenn `topo[v]` ein Wert zugewiesen wird.
   - Also wurde `topo[w]` schon vorher ein Wert zugewiesen.
   - Da `topoNum` immer größer wird, folgt `topo[v]` $>$ `topo[w]`.

Korrektheit und Komplexität

Theorem

Der Algorithmus terminiert, und wenn er terminiert enthält das Array `topo` eine topologische Ordnung von Digraph G.

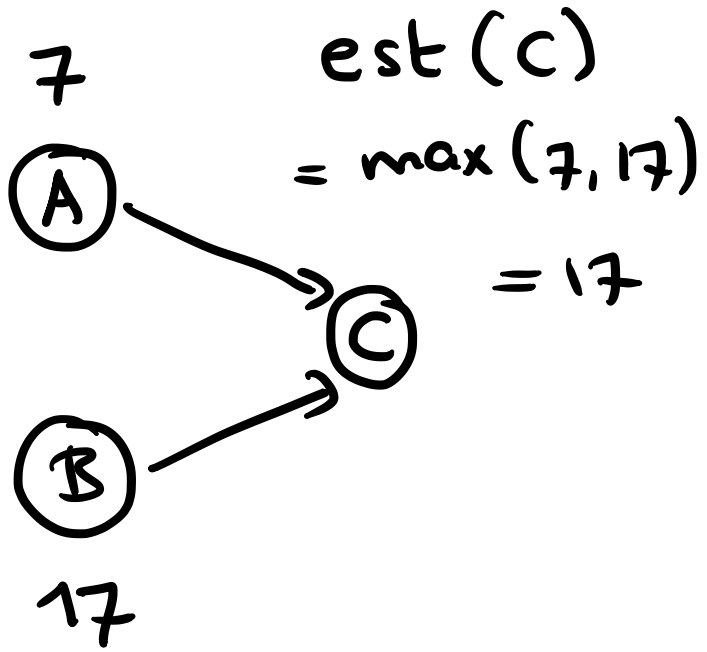
Beweis:

1. Die DFS besucht jeden Knoten, daher sind die Zahlen in dem Array `topo` alle verschieden im Bereich 1 bis $|V|$.
2. Sei $(v, w) \in E$.
   - w ist kein Vorgänger von v im DFS-Baum, sonst wäre G zyklisch.
   - Daher ist w `BLACK`, wenn `topo[v]` ein Wert zugewiesen wird.
   - Also wurde `topo[w]` schon vorher ein Wert zugewiesen.
   - Da `topoNum` immer größer wird, folgt `topo[v]` $>$ `topo[w]`.

Zeitkomplexität

Eine topologische Ordnung kann in $\mathcal{O}(|V| + |E|)$ bestimmt werden.

Übersicht



Gewichtete Graphen

Knotengewichteter Graph

Ein knotengewichteter Graph G ist ein Tripel (V, E, W), wobei:

- (V, E) ein – gerichteter oder ungerichteter – Graph ist, und
- $W : V \longrightarrow \mathbb{R}$ die Gewichtsfunktion. $W(v)$ ist das Gewicht des Knotens v.

Gewichtete Graphen

Knotengewichteter Graph

Ein knotengewichteter Graph G ist ein Tripel (V, E, W), wobei:

- (V, E) ein – gerichteter oder ungerichteter – Graph ist, und
- $W : V \longrightarrow \mathbb{R}$ die Gewichtsfunktion. $W(v)$ ist das Gewicht des Knotens v.

Kantengewichteter Graph

Ein (kanten-)gewichteter Graph G ist ein Tripel (V, E, W), wobei:

- (V, E) ein – gerichteter oder ungerichteter – Graph ist, und
- $W : E \longrightarrow \mathbb{R}$ Gewichtsfunktion. $W(e)$ ist das Gewicht der Kante e.

Gewichtete Graphen

Knotengewichteter Graph

Ein knotengewichteter Graph G ist ein Tripel (V, E, W), wobei:

- (V, E) ein – gerichteter oder ungerichteter – Graph ist, und
- $W : V \longrightarrow \mathbb{R}$ die Gewichtsfunktion. $W(v)$ ist das Gewicht des Knotens v.

Kantengewichteter Graph

Ein (kanten-)gewichteter Graph G ist ein Tripel (V, E, W), wobei:

- (V, E) ein – gerichteter oder ungerichteter – Graph ist, und
- $W : E \longrightarrow \mathbb{R}$ Gewichtsfunktion. $W(e)$ ist das Gewicht der Kante e.

Ein knotengewichteter Graph (V, E, W) lässt sich in einen kantengewichteten Graphen (V, E, W') überführen, indem *alle* von einem Knoten v ausgehenden Kanten $e = (v, \cdot) \in E$ das Gewicht $W'(e) = W(v)$ erhalten.

Gewichtete Graphen: Darstellung

Gewichtete Graphen werden ebenso als Adjazenzlisten oder Adjazenzmatrix dargestellt:

Gewichtete Graphen: Darstellung

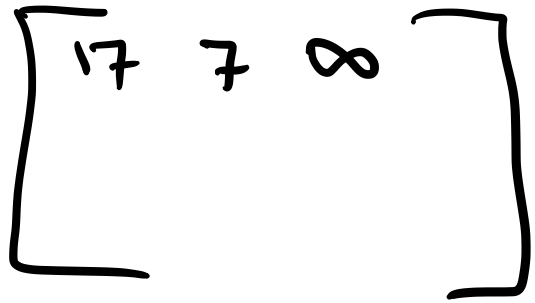
Gewichtete Graphen werden ebenso als Adjazenzlisten oder Adjazenzmatrix dargestellt:

- Bei knotengewichteten Graphen wird die Zusatzinformation zu den Knoten üblicherweise in einem weiteren Array gespeichert – vgl. `int color[n];` bei BFS oder DFS.

Gewichtete Graphen: Darstellung

Gewichtete Graphen werden ebenso als Adjazenzlisten oder Adjazenzmatrix dargestellt:

- Bei knotengewichteten Graphen wird die Zusatzinformation zu den Knoten üblicherweise in einem weiteren Array gespeichert – vgl. `int color[n];` bei BFS oder DFS.
- Kantengewichte können bei der Adjazenzmatrixdarstellung direkt in der Matrix gespeichert werden.



Gewichtete Graphen: Darstellung

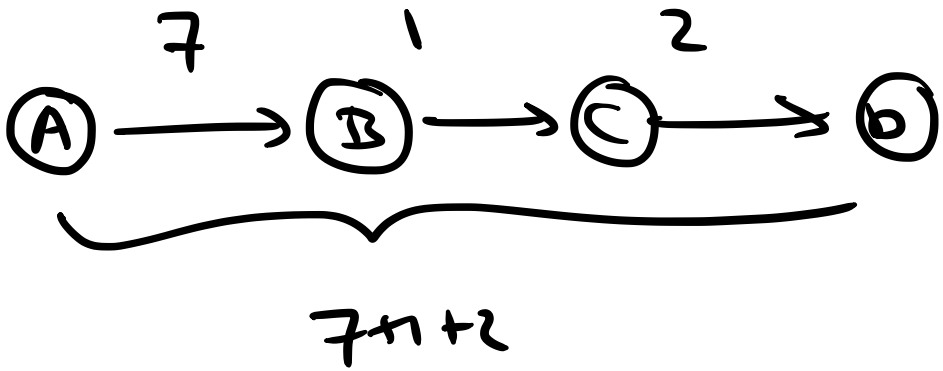
Gewichtete Graphen werden ebenso als Adjazenzlisten oder Adjazenzmatrix dargestellt:

- Bei knotengewichteten Graphen wird die Zusatzinformation zu den Knoten üblicherweise in einem weiteren Array gespeichert – vgl. `int color[n];` bei BFS oder DFS.
- Kantengewichte können bei der Adjazenzmatrixdarstellung direkt in der Matrix gespeichert werden.
  Ein besonderer Wert, etwa ∞ besagt, dass keine Kante existiert.

Das Kritische-Pfad-Problem: Einführung

Das Kritische-Pfad-Problem: Einführung

Das Gewicht eines Pfades ist die Summe der Kantengewichten der besuchten Kanten, oder die Summe der Knotengewichte der besuchten Knoten.



Das Kritische-Pfad-Problem: Einführung

Das Gewicht eines Pfades ist die Summe der Kantengewichten der besuchten Kanten, oder die Summe der Knotengewichte der besuchten Knoten.

Kritischer-Pfad-Problem

Finde den längsten Pfad (bezogen auf das Gesamtgewicht) in einem (kanten- oder knoten-)gewichteten DAG.

Das Kritische-Pfad-Problem: Einführung

Das Gewicht eines Pfades ist die Summe der Kantengewichten der besuchten Kanten, oder die Summe der Knotengewichte der besuchten Knoten.

Kritischer-Pfad-Problem

Finde den längsten Pfad (bezogen auf das Gesamtgewicht) in einem (kanten- oder knoten-)gewichteten DAG.

- Wir betrachten hier *nur* knotengewichtete DAGs.

Das Kritische-Pfad-Problem: Einführung

Das Gewicht eines Pfades ist die Summe der Kantengewichten der besuchten Kanten, oder die Summe der Knotengewichte der besuchten Knoten.

Kritischer-Pfad-Problem

Finde den längsten Pfad (bezogen auf das Gesamtgewicht) in einem (kanten- oder knoten-)gewichteten DAG.

- Wir betrachten hier *nur* knotengewichtete DAGs.

Beispiel (Anwendung)

Wie lange benötigt man für die Ausführung der bereits vorgestellten Aufgaben mindestens, wenn für jede Aufgabe eine Dauer gegeben ist und unabhängige Aufgaben gleichzeitig erledigt werden können?

Das Kritische-Pfad-Problem: Anwendung

Das Kritische-Pfad-Problem: Anwendung

Früheste Startzeit- und Endzeitpunkt

Finde den frühestmöglichen Beendigungszeitpunkt (earliest finish time, eft) für eine Menge voneinander abhängiger Aufgaben.

Das Kritische-Pfad-Problem: Anwendung

Früheste Startzeit- und Endzeitpunkt

Finde den frühestmöglichen Beendigungszeitpunkt (earliest finish time, eft) für eine Menge voneinander abhängiger Aufgaben.

- Jede Aufgabe hat eine (nicht-negative) Dauer.

Das Kritische-Pfad-Problem: Anwendung

Früheste Startzeit- und Endzeitpunkt

Finde den frühestmöglichen Beendigungszeitpunkt (earliest finish time, eft) für eine Menge voneinander abhängiger Aufgaben.

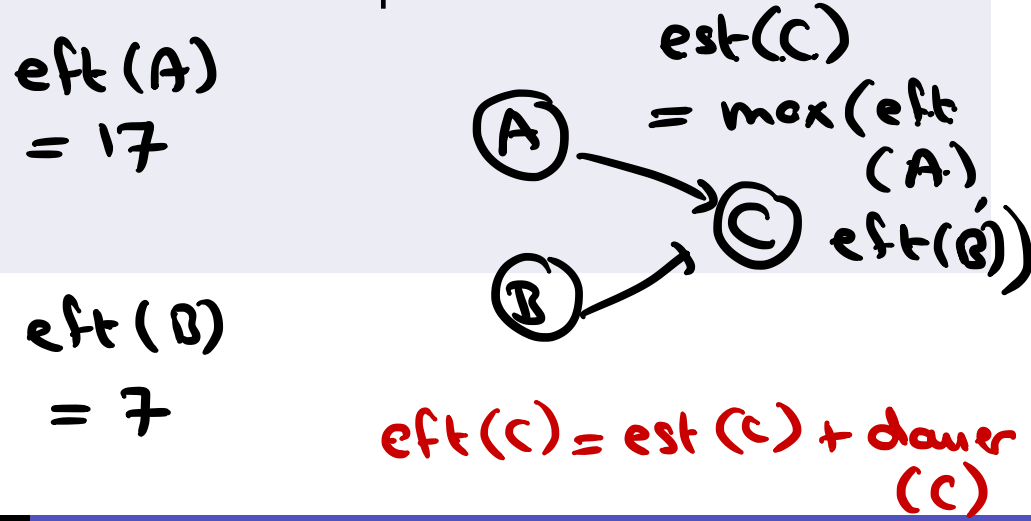
- Jede Aufgabe hat eine (nicht-negative) Dauer.
- Der früheste Startzeitpunkt (earliest start time, est) für Aufgabe v ($est(v)$) ist 0 wenn v keine Abhängigkeiten hat;

Das Kritische-Pfad-Problem: Anwendung

Früheste Startzeit- und Endzeitpunkt

Finde den frühestmöglichen Beendigungszeitpunkt (earliest finish time, eft) für eine Menge voneinander abhängiger Aufgaben.

- Jede Aufgabe hat eine (nicht-negative) Dauer.
- Der früheste Startzeitpunkt (earliest start time, est) für Aufgabe v ($est(v)$) ist 0 wenn v keine Abhängigkeiten hat; andernfalls:
- $est(v)$ ist das Maximum der frühesten Endzeitpunkte seiner Abhängigkeiten.



Das Kritische-Pfad-Problem: Anwendung

Früheste Startzeit- und Endzeitpunkt

Finde den frühestmöglichen Beendigungszeitpunkt (earliest finish time, eft) für eine Menge voneinander abhängiger Aufgaben.

- Jede Aufgabe hat eine (nicht-negative) Dauer.
- Der früheste Startzeitpunkt (earliest start time, est) für Aufgabe v ($est(v)$) ist 0 wenn v keine Abhängigkeiten hat; andernfalls:
- $est(v)$ ist das Maximum der frühesten Endzeitpunkte seiner Abhängigkeiten.

Der früheste Endzeitpunkt (earliest finish time) für Aufgabe v ($eft(v)$) ist gleich $est(v)$ plus der Dauer von v.

Das Kritische-Pfad-Problem: Anwendung

Das Kritische-Pfad-Problem: Anwendung

Kritische Pfad

Der kritische Pfad ist eine Folge von Aufgaben $v_0, \ldots, v_k$, so dass

Das Kritische-Pfad-Problem: Anwendung

Kritische Pfad

Der kritische Pfad ist eine Folge von Aufgaben $v_0, \ldots, v_k$, so dass

- v_0 keine Abhängigkeiten hat.

Das Kritische-Pfad-Problem: Anwendung

Kritische Pfad

Der kritische Pfad ist eine Folge von Aufgaben $v_0, \ldots, v_k$, so dass

- v_0 keine Abhängigkeiten hat.
- v_i abhängig von v_{i-1} ist, wobei $est(v_i) = eft(v_{i-1})$.

Das Kritische-Pfad-Problem: Anwendung

Kritische Pfad

Der kritische Pfad ist eine Folge von Aufgaben $v_0, \ldots, v_k$, so dass

- v_0 keine Abhängigkeiten hat.
- v_i abhängig von v_{i-1} ist, wobei $est(v_i) = eft(v_{i-1})$.
- $eft(v_k)$ das Maximum über alle Aufgaben ergibt.

Das Kritische-Pfad-Problem: Anwendung

Kritische Pfad

Der kritische Pfad ist eine Folge von Aufgaben $v_0, \ldots, v_k$, so dass

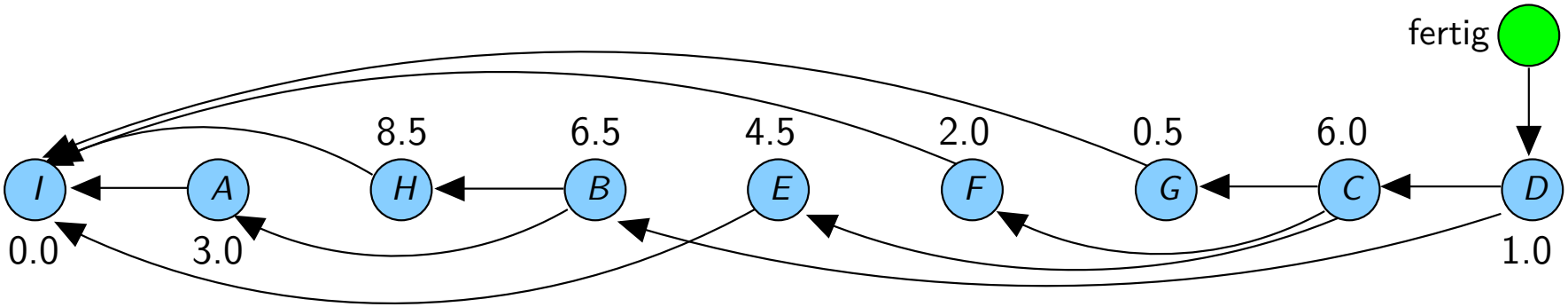
- v_0 keine Abhängigkeiten hat.
- v_i abhängig von v_{i-1} ist, wobei $est(v_i) = eft(v_{i-1})$.
- $eft(v_k)$ das Maximum über alle Aufgaben ergibt.

Dann gibt es eine kritische Abhängigkeit zwischen v_{i-1} und v_i, d.h. eine Verzögerung in v_{i-1} führt zu einer Verzögerung in v_i.

Kritische-Pfad-Analyse: Implementierung

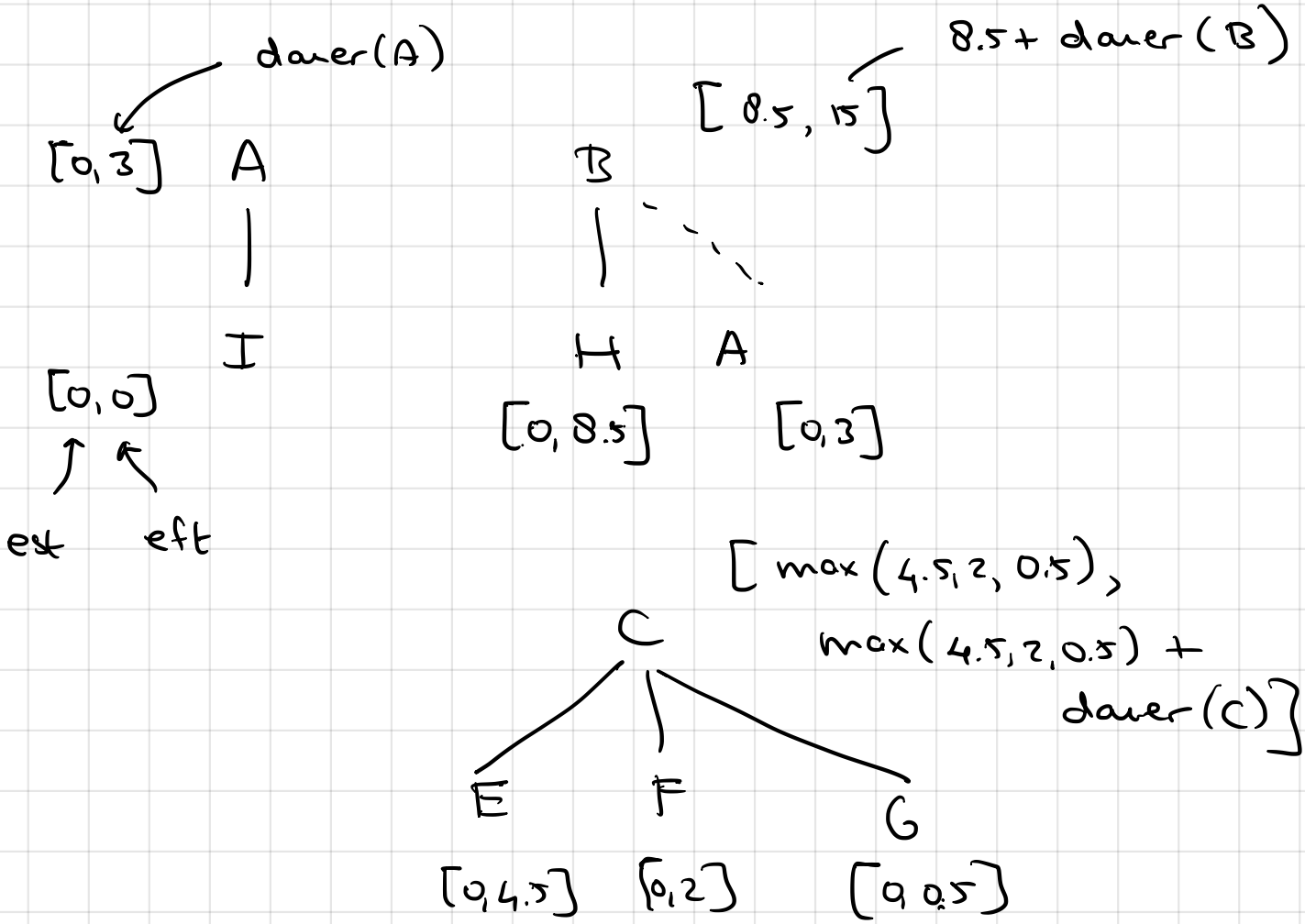
```
1  // Knotengewichte in duration.
2  // Ausgabe: eft, kritischer Pfad kodiert in critDep
3  void DFS(List adj[n], int start, int &color[n],
4                  int duration[n], int &critDep[n], int &eft[n]) {
5    color[start] = GRAY; critDep[start] = -1; int est = 0;
6    foreach (next in adj[start]) {
7      if (color[next] == WHITE)
8        DFS(adj, next, color, duration, critDep, eft);
9      if (eft[next] >= est) {
10       est = eft[next]; critDep[start] = next;
11     }
12   }
13   eft[start] = est + duration[start];
14   color[start] = BLACK;
15 }
16 void critPath(List adj[n], int n,
17               int duration[n], int &critDep[n], int &eft[n]){
18   int color[n] = WHITE;
19   for (int i = 0; i < n; i++)
20     if (color[i] == WHITE)
21       DFS(adj, i, color, duration, critDep, eft);
22 }
```

Kritische-Pfad-Analyse: Beispiel

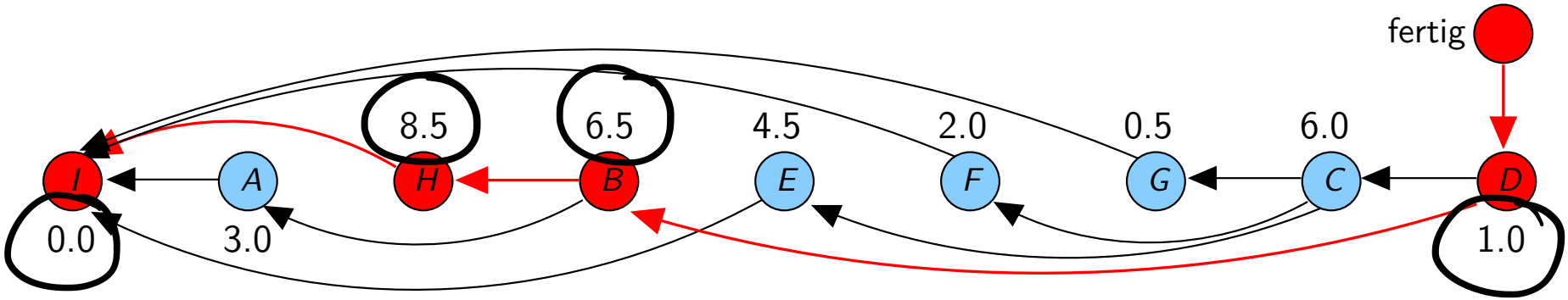


I	A	H	B	E	F	G	C	D
wake up	choose clothes	shower	dress	make coffee	make toast	pour juice	eat breakf	leave
0.0	3.0	8.5	6.5	4.5	2.0	0.5	6.0	1.0

Dauer


dauer(A)
[0,3]
A
I
[0,0]
8.5 + dauer(B)
[8.5, 15]
B
H
A
[0, 8.5]
[0,3]
[max(4.5, 2, 0.5),
max(4.5, 2, 0.5) +
dauer(C)]
C
E
F
G
[0,4.5]
[0,2]
[0,0.5]

Kritische-Pfad-Analyse: Beispiel



I	A	H	B	E	F	G	C	D
wake up	choose clothes	shower	dress	make coffee	make toast	pour juice	eat breakf	leave
0.0	3.0	8.5	6.5	4.5	2.0	0.5	6.0	1.0

Dauer

- $eft = 1 + 6.5 + 8.5 + 0 = 16.$

Nächste Vorlesung

Nächste Vorlesung

Freitag 22. Juni, 13:15 (Hörsaal H01). Bis dann!