Datenstrukturen und Algorithmen

Vorlesung 5: Rekursionsgleichungen (K4)

Joost-Pieter Katoen

Lehrstuhl für Informatik 2
Software Modeling and Verification Group

https://moves.rwth-aachen.de/teaching/ss-18/dsal/

24. April 2015

Übersicht

1. Binäre Suche
   - Was ist binäre Suche?
   - Worst-Case Analyse von Binärer Suche
2. Rekursionsgleichungen
   - Fibonacci-Zahlen
   - Ermittlung von Rekursionsgleichungen
3. Lösen von Rekursionsgleichungen
   - Die Substitutionsmethode
   - Rekursionsbäume

Übersicht

1. Binäre Suche
   - Was ist binäre Suche?
   - Worst-Case Analyse von Binärer Suche

2. Rekursionsgleichungen
   - Fibonacci-Zahlen
   - Ermittlung von Rekursionsgleichungen

3. Lösen von Rekursionsgleichungen
   - Die Substitutionsmethode
   - Rekursionsbäume

Binäre Suche

Suchen in einem sortierten Array

Eingabe: *Sortiertes* Array `E` mit `n` Einträgen, und das gesuchte Element `K`.

Ausgabe: Ist `K` in `E` enthalten?

Binäre Suche

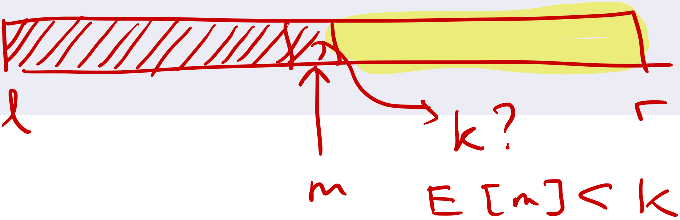
Suchen in einem sortierten Array

Eingabe: *Sortiertes* Array `E` mit `n` Einträgen, und das gesuchte Element `K`.

Ausgabe: Ist `K` in `E` enthalten?

Idee

Da `E` sortiert ist, können wir das gesuchte Element `K` schneller suchen.



Binäre Suche

Suchen in einem sortierten Array

Eingabe: *Sortiertes* Array `E` mit `n` Einträgen, und das gesuchte Element `K`.

Ausgabe: Ist `K` in `E` enthalten?

Idee

Da `E` sortiert ist, können wir das gesuchte Element `K` schneller suchen.

Liegt `K` nicht in der Mitte von `E`, dann:

Binäre Suche

Suchen in einem sortierten Array

Eingabe: *Sortiertes* Array `E` mit `n` Einträgen, und das gesuchte Element `K`.

Ausgabe: Ist `K` in `E` enthalten?

Idee

Da `E` sortiert ist, können wir das gesuchte Element `K` schneller suchen.
Liegt `K` nicht in der Mitte von `E`, dann:

1. suche in der linken Hälfte von `E`, falls `K` $<$ `E[mid]`

Binäre Suche

Suchen in einem sortierten Array

Eingabe: *Sortiertes* Array `E` mit `n` Einträgen, und das gesuchte Element `K`.

Ausgabe: Ist `K` in `E` enthalten?

Idee

Da `E` sortiert ist, können wir das gesuchte Element `K` schneller suchen.
Liegt `K` nicht in der Mitte von `E`, dann:

1. suche in der linken Hälfte von `E`, falls `K` $<$ `E[mid]`
2. suche in der rechten Hälfte von `E`, falls `K` $>$ `E[mid]`

Binäre Suche

Suchen in einem sortierten Array

Eingabe: *Sortiertes* Array `E` mit `n` Einträgen, und das gesuchte Element `K`.

Ausgabe: Ist `K` in `E` enthalten?

Idee

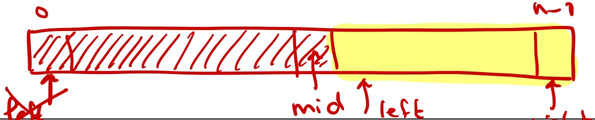
Da `E` sortiert ist, können wir das gesuchte Element `K` schneller suchen.
Liegt `K` nicht in der Mitte von `E`, dann:

1. suche in der linken Hälfte von `E`, falls `K` $<$ `E[mid]`
2. suche in der rechten Hälfte von `E`, falls `K` $>$ `E[mid]`

Fazit:

Wir halbieren den Suchraum in jedem Durchlauf.

Binäre Suche

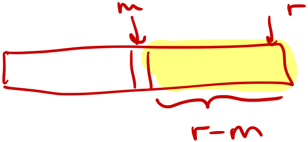



```
bool binSearch(int E[], int n, int K) {
  int left = 0, right = n - 1;
  while (left <= right) {
    int mid = floor((left + right) / 2); // runde ab
    if (E[mid] == K) { return true; }
    if (E[mid] > K) { right = mid - 1; }
    if (E[mid] < K) { left = mid + 1; }
  }
  return false;
}
```

Binäre Suche – Analyse

Abkürzungen: $m = \texttt{mid}$, $r = \texttt{right}$, $l = \texttt{left}$

Binäre Suche – Analyse



Abkürzungen: $m = \texttt{mid}$, $r = \texttt{right}$, $l = \texttt{left}$

Größe des undurchsuchten Arrays

Im nächsten Durchlauf ist die Größe des Arrays $m - l$ oder $r - m$.

Binäre Suche – Analyse

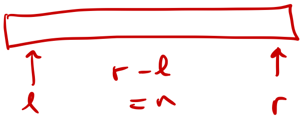
Abkürzungen: $m = \texttt{mid}$, $r = \texttt{right}$, $l = \texttt{left}$

Größe des undurchsuchten Arrays

Im nächsten Durchlauf ist die Größe des Arrays $m - l$ oder $r - m$.

Hierbei ist $m = \lfloor (l + r)/2 \rfloor$.

Binäre Suche – Analyse



Abkürzungen: $m = \texttt{mid}$, $r = \texttt{right}$, $l = \texttt{left}$

Größe des undurchsuchten Arrays

Im nächsten Durchlauf ist die Größe des Arrays $\underbrace{m - l}_{1}$ oder $\underbrace{r - m}_{2}$.

Hierbei ist $m = \lfloor (l + r)/2 \rfloor$.

Die neue Größe ist also:

1 ▸ $m - l \;=\; \lfloor \underbrace{(l + r)/2}_{m} \rfloor - l \;=\; \lfloor \underbrace{(r - l)}/2 \rfloor \;=\; \lfloor (n - 1)/2 \rfloor$

Binäre Suche – Analyse

Abkürzungen: $m = \texttt{mid}$, $r = \texttt{right}$, $l = \texttt{left}$

Größe des undurchsuchten Arrays

Im nächsten Durchlauf ist die Größe des Arrays $m - l$ oder $r - m$.

2

Hierbei ist $m = \lfloor (l + r)/2 \rfloor$.

Die neue Größe ist also:

- $m - l \;=\; \lfloor (l + r)/2 \rfloor - l \;=\; \lfloor (r - l)/2 \rfloor \;=\; \lfloor (n - 1)/2 \rfloor$

  oder

Binäre Suche – Analyse

Abkürzungen: $m =$ `mid`, $r =$ `right`, $l =$ `left`

Größe des undurchsuchten Arrays

Im nächsten Durchlauf ist die Größe des Arrays $m - l$ oder $r - m$.

Hierbei ist $m = \lfloor (l + r)/2 \rfloor$.

Die neue Größe ist also:

- $m - l \;=\; \lfloor (l + r)/2 \rfloor - l \;=\; \lfloor (r - l)/2 \rfloor \;=\; \lfloor (n - 1)/2 \rfloor$

  oder

- $r - m \;=\; r - \underbrace{\lfloor (l + r)/2 \rfloor}_{= m} \;=\; \lceil \underbrace{(r - l)}/2 \rceil \;=\; \lceil (n - 1)/2 \rceil$

Binäre Suche – Analyse

Abkürzungen: $m = \texttt{mid}$, $r = \texttt{right}$, $l = \texttt{left}$

Größe des undurchsuchten Arrays

Im nächsten Durchlauf ist die Größe des Arrays $m - l$ oder $r - m$.

Hierbei ist $m = \lfloor (l + r)/2 \rfloor$.

Die neue Größe ist also:

- $m - l \; = \; \lfloor (l + r)/2 \rfloor - l \; = \; \lfloor (r - l)/2 \rfloor \; = \; \lfloor (n - 1)/2 \rfloor$

  oder
- $r - m \; = \; r - \lfloor (l + r)/2 \rfloor \; = \; \lceil (r - l)/2 \rceil \; = \; \lceil (n - 1)/2 \rceil$

Im schlimmsten Fall ist die neue Größe des Arrays also:

$$\lceil (n - 1)/2 \rceil$$

Rekursionsgleichung für Binäre Suche

Sei $S(n)$ die maximale Anzahl der Schleifendurchläufe bei einer erfolglosen Suche.

$K \notin E$ Warum? → Worst-case Verhalten

Rekursionsgleichung für Binäre Suche

Sei $S(n)$ die maximale Anzahl der Schleifendurchläufe bei einer erfolglosen Suche.

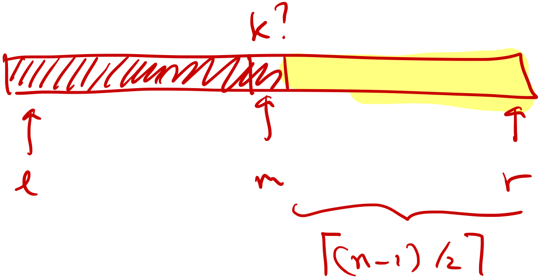
Wir erhalten die Rekursionsgleichung:

Rekursionsgleichung für Binäre Suche

Sei $S(n)$ die maximale Anzahl der Schleifendurchläufe bei einer erfolglosen Suche.

Wir erhalten die Rekursionsgleichung:

$$S(n) = \begin{cases} 0 & \text{falls } n = 0 \\ 1 + S(\lceil (n-1)/2 \rceil) & \text{falls } n > 0 \end{cases}$$



Rekursionsgleichung für Binäre Suche

Sei $S(n)$ die maximale Anzahl der Schleifendurchläufe bei einer erfolglosen Suche.

Wir erhalten die Rekursionsgleichung:

$$S(n) = \begin{cases} 0 & \text{falls } n = 0 \\ 1 + S(\lceil (n-1)/2 \rceil) & \text{falls } n > 0 \end{cases}$$

Die ersten Werten sind:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$S(n)$	0	1	2	2	3	3	3	3	4

Rekursionsgleichung für Binäre Suche

Sei $S(n)$ die maximale Anzahl der Schleifendurchläufe bei einer erfolglosen Suche.

Wir erhalten die Rekursionsgleichung:

$$S(n) = \begin{cases} 0 & \text{falls } n = 0 \\ 1 + S(\lceil (n-1)/2 \rceil) & \text{falls } n > 0 \end{cases}$$

16

8

4

2

1

Die ersten Werten sind:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$S(n)$	0	1	2	2	3	3	3	3	4

Wir haben letztes Mal abgeleitet: $S(n) = \lfloor \log(n) \rfloor + 1$.

Lösen der Rekursionsgleichung

Betrachte den Spezialfall $n = 2^k - 1$.

Lösen der Rekursionsgleichung

Betrachte den Spezialfall $n = 2^k - 1$.

Da die maximale neue Größe des Arrays $\lceil (n-1)/2 \rceil$ ist, leiten wir her:

Lösen der Rekursionsgleichung

Betrachte den Spezialfall $n = 2^k - 1$.

Da die maximale neue Größe des Arrays $\lceil (n-1)/2 \rceil$ ist, leiten wir her:

$$\left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{(2^k - 1) - 1}{2} \right\rceil =$$

Lösen der Rekursionsgleichung

Betrachte den Spezialfall $n = 2^k - 1$.

Da die maximale neue Größe des Arrays $\lceil (n-1)/2 \rceil$ ist, leiten wir her:

$$\left\lceil \frac{(2^k - 1) - 1}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{2^k - 2}{2} \right\rceil =$$

Lösen der Rekursionsgleichung

Betrachte den Spezialfall $n = 2^k \cancel{-1}$

Da die maximale neue Größe des Arrays $\lceil (n-1)/2 \rceil$ ist, leiten wir her:

$$\left\lceil \frac{(2^k - 1) - 1}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{2^k - 2}{2} \right\rceil = \cancel{\lceil} 2^{k-1} - 1 \cancel{\rceil} = 2^{k-1} - 1.$$

$$\left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{2^k - 1}{2} \right\rceil = \left\lceil 2^{k-1} - \frac{1}{2} \right\rceil$$

Lösen der Rekursionsgleichung

Betrachte den Spezialfall $n = 2^k - 1$.

Da die maximale neue Größe des Arrays $\lceil (n-1)/2 \rceil$ ist, leiten wir her:

$$\left\lceil \frac{(2^k - 1) - 1}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{2^k - 2}{2} \right\rceil = \lceil 2^{k-1} - 1 \rceil = 2^{k-1} - 1.$$

Daher gilt für $k > 0$ nach der Definition $S(n) = 1 + S(\lceil (n-1)/2 \rceil)$, dass:

$$S(\underbrace{2^k - 1}_{n}) = 1 + S(\underbrace{2^{k-1} - 1}_{\lceil \frac{n-1}{2} \rceil})$$

Lösen der Rekursionsgleichung

Betrachte den Spezialfall $n = 2^k - 1$.

Da die maximale neue Größe des Arrays $\lceil (n-1)/2 \rceil$ ist, leiten wir her:

$$\left\lceil \frac{(2^k - 1) - 1}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{2^k - 2}{2} \right\rceil = \lceil 2^{k-1} - 1 \rceil = 2^{k-1} - 1.$$

Daher gilt für $k > 0$ nach der Definition $S(n) = 1 + S(\lceil (n-1)/2 \rceil)$, dass:

$S(2^k - 1) = 1 + S(2^{k-1} - 1)$ und damit $S(2^k - 1) = k + \underbrace{S(2^0 - 1)}_{=0}$

$S(2^{k-1} - 1) = 1 + S(2^{k-2} - 1) = 1 + (1 + S(2^{k-3} - 1))$

Lösen der Rekursionsgleichung

Betrachte den Spezialfall $n = 2^k - 1$.

Da die maximale neue Größe des Arrays $\lceil (n{-}1)/2 \rceil$ ist, leiten wir her:

$$\left\lceil \frac{(2^k - 1) - 1}{2} \right\rceil \;=\; \left\lceil \frac{2^k - 2}{2} \right\rceil \;=\; \lceil 2^{k-1} - 1 \rceil \;=\; 2^{k-1} - 1.$$

Daher gilt für $k > 0$ nach der Definition $S(n) = 1 + S(\lceil (n-1)/2 \rceil)$, dass:

$$S(2^k{-}1) \;=\; 1{+}S(2^{k-1}{-}1) \quad \text{und damit } S(2^k{-}1) \;=\; k{+}\underbrace{S(2^0 - 1)}_{=0} \;=\; k.$$

Binäre Suche – Analyse

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$S(n)$	0	1	2	2	3	3	3	3	4

Binäre Suche – Analyse

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$S(n)$	0	1	2	2	3	3	3	3	4

Vermutung: $S(2^k) \ = \ 1 + S(2^{k-1})$.

Binäre Suche – Analyse

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$S(n)$	0	1	2	2	3	3	3	3	4

Vermutung: $S(2^k) = 1 + S(2^{k-1})$.

4

$S(n)$ steigt monoton, also $S(n) = k$ falls $2^{k-1} \leqslant n < 2^k$.

$S(4) = 3 \qquad 2^2 \leq n < 2^k = 2^3$

$4 \leq n < 8$

Binäre Suche – Analyse

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$S(n)$	0	1	2	2	3	3	3	3	4

Vermutung: $S(2^k) \ = \ 1 + S(2^{k-1})$.

$S(n)$ steigt monoton, also $S(n) = k$ falls $2^{k-1} \leqslant n < 2^k$.

Oder: falls $k - 1 \leqslant \log(n) < k$.

$$\underbrace{\log(2^{k-1})}_{k-1} \leq \log(n) \leq \underbrace{\log(2^k)}_{k}$$

Binäre Suche – Analyse

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$S(n)$	0	1	2	2	3	3	3	3	4

Vermutung: $S(2^k) \;=\; 1 + S(2^{k-1})$.

$S(n)$ steigt monoton, also $S(n) = k$ falls $2^{k-1} \leqslant n < 2^k$.

Oder: falls $k - 1 \leqslant \log(n) < k$.

Dann ist $S(n) = \underline{\lfloor \log(n) \rfloor + 1}$.

Binäre Suche – Analyse

Wir vermuten $S(n) = \lfloor \log(n) \rfloor + 1$ für $n > 0$

Binäre Suche – Analyse

Wir vermuten $S(n) = \lfloor \log(n) \rfloor + 1$ für $n > 0$

Induktion über n:

Binäre Suche – Analyse

Wir vermuten $S(n) = \lfloor \log(n) \rfloor + 1$ für $n > 0$

Induktion über n:

Basis: $S(1) \;=\; 1 \;=\; \lfloor \log(1) \rfloor + 1$

Binäre Suche – Analyse

Wir vermuten $S(n) = \lfloor \log(n) \rfloor + 1$ für $n > 0$

Induktion über n:

Basis: $S(1) \; = \; 1 \; = \; \lfloor \log(1) \rfloor + 1$

Induktionsschritt: Sei $n > 1$. Dann:

Binäre Suche – Analyse

Wir vermuten $S(n) = \lfloor \log(n) \rfloor + 1$ für $n > 0$

Induktion über n:

Basis: $S(1) \; = \; 1 \; = \; \lfloor \log(1) \rfloor + 1$

Induktionsschritt: Sei $n > 1$. Dann:

$$S(n) \; = \; 1 + S(\lceil (n-1)/2 \rceil) \; =$$

Binäre Suche – Analyse

Wir vermuten $S(n) = \lfloor \log(n) \rfloor + 1$ für $n > 0$

Induktion über n:

Basis: $S(1) \ = \ 1 \ = \ \lfloor \log(1) \rfloor + 1$

Induktionsschritt: Sei $n > 1$. Dann:

$$S(n) \ = \ 1 + S(\lceil (n-1)/2 \rceil) \ = \ 1 + \lfloor \log(\lceil (n-1)/2 \rceil) \rfloor + 1$$

Binäre Suche – Analyse

Wir vermuten $S(n) = \lfloor \log(n) \rfloor + 1$ für $n > 0$

Induktion über n:

Basis: $S(1) \;=\; 1 \;=\; \lfloor \log(1) \rfloor + 1$

Induktionsschritt: Sei $n > 1$. Dann:

$$S(n) \;=\; 1 + S(\lceil (n-1)/2 \rceil) \;=\; 1 + \lfloor \log(\lceil (n-1)/2 \rceil) \rfloor + 1$$

Man kann zeigen (Hausaufgabe): $\lfloor \log(\lceil (n-1)/2 \rceil) \rfloor + 1 = \lfloor \log(n) \rfloor$.

Binäre Suche – Analyse

Wir vermuten $S(n) = \lfloor \log(n) \rfloor + 1$ für $n > 0$

Induktion über n:

Basis: $S(1) \; = \; 1 \; = \; \lfloor \log(1) \rfloor + 1$

Induktionsschritt: Sei $n > 1$. Dann:

$$S(n) \; = \; 1 + S(\lceil (n-1)/2 \rceil) \; = \; 1 + \lfloor \log(\lceil (n-1)/2 \rceil) \rfloor + 1$$

Man kann zeigen (Hausaufgabe): $\lfloor \log(\lceil (n-1)/2 \rceil) \rfloor + 1 = \lfloor \log(n) \rfloor$.

Damit: $S(n) = \lfloor \log(n) \rfloor + 1$ für $n > 0$.

Binäre Suche – Analyse

Theorem

Die Worst Case Zeitkomplexität der binären Suche ist
$W(n) = \lfloor \log(n) \rfloor + 1$.

Übersicht

1. Binäre Suche
   - Was ist binäre Suche?
   - Worst-Case Analyse von Binärer Suche
2. Rekursionsgleichungen
   - Fibonacci-Zahlen
   - Ermittlung von Rekursionsgleichungen
3. Lösen von Rekursionsgleichungen
   - Die Substitutionsmethode
   - Rekursionsbäume

Rekursionsgleichungen

Rekursionsgleichung

Für rekursive Algorithmen wird die Laufzeit meistens durch Rekursionsgleichungen beschrieben.

method f (....n ...) {

if ... $\underbrace{f\left(\frac{n}{2}\right) + f\left(\frac{n}{2}\right)}$ }

2 Aufrufe von f
mit Argumentgröße $\frac{n}{2}$

$$T_f(n) = 2 \cdot T_f\left(\frac{n}{2}\right) + c$$

Rekursionsgleichungen

Rekursionsgleichung

Für rekursive Algorithmen wird die Laufzeit meistens durch Rekursionsgleichungen beschrieben.

Eine Rekursionsgleichung ist eine Gleichung oder eine Ungleichung, die eine Funktion durch ihre eigenen Funktionswerte für kleinere Eingaben beschreibt.

$$T(n) = 2\,T\left(\frac{n}{2}\right) + c$$

$\geq \qquad\qquad \geq$

Rekursionsgleichungen

Rekursionsgleichung

Für rekursive Algorithmen wird die Laufzeit meistens durch Rekursionsgleichungen beschrieben.

Eine Rekursionsgleichung ist eine Gleichung oder eine Ungleichung, die eine Funktion durch ihre eigenen Funktionswerte für kleinere Eingaben beschreibt.

Beispiele

- $T(n) = T(n-1) + 1$ Lineare Suche

Rekursionsgleichungen

Rekursionsgleichung

Für rekursive Algorithmen wird die Laufzeit meistens durch Rekursionsgleichungen beschrieben.

Eine Rekursionsgleichung ist eine Gleichung oder eine Ungleichung, die eine Funktion durch ihre eigenen Funktionswerte für kleinere Eingaben beschreibt.

Beispiele

- $T(n) = T(n-1) + 1$ Lineare Suche
- $T(n) = T(\lceil (n-1)/2 \rceil) + 1$ Binäre Suche

Rekursionsgleichungen

Rekursionsgleichung

Für rekursive Algorithmen wird die Laufzeit meistens durch Rekursionsgleichungen beschrieben.

Eine Rekursionsgleichung ist eine Gleichung oder eine Ungleichung, die eine Funktion durch ihre eigenen Funktionswerte für kleinere Eingaben beschreibt.

Beispiele

- $T(n) = T(n-1) + 1$ Lineare Suche
- $T(n) = T(\lceil (n-1)/2 \rceil) + 1$ Binäre Suche
- $T(n) = T(n-1) + n - 1$ Bubblesort

Rekursionsgleichungen

Rekursionsgleichung

Für rekursive Algorithmen wird die Laufzeit meistens durch Rekursionsgleichungen beschrieben.

Eine Rekursionsgleichung ist eine Gleichung oder eine Ungleichung, die eine Funktion durch ihre eigenen Funktionswerte für kleinere Eingaben beschreibt.

Beispiele

- $T(n) = T(n-1) + 1$ Lineare Suche
- $T(n) = T(\lceil (n-1)/2 \rceil) + 1$ Binäre Suche
- $T(n) = T(n-1) + n - 1$ Bubblesort
- $T(n) = 2 \cdot T(n/2) + n - 1$ Mergesort

Rekursionsgleichungen

Rekursionsgleichung

Für rekursive Algorithmen wird die Laufzeit meistens durch Rekursionsgleichungen beschrieben.

Eine Rekursionsgleichung ist eine Gleichung oder eine Ungleichung, die eine Funktion durch ihre eigenen Funktionswerte für kleinere Eingaben beschreibt.

Beispiele

- $T(n) = T(n-1) + 1$ Lineare Suche
- $T(n) = T(\lceil (n-1)/2 \rceil) + 1$ Binäre Suche
- $T(n) = T(n-1) + n - 1$ Bubblesort
- $T(n) = 2 \cdot T(n/2) + n - 1$ Mergesort
- $T(n) = 7 \cdot T(n/2) + c \cdot n^2$ Strassen's Matrixmultiplikation

Fibonacci-Zahlen

Problem

Betrachte das Wachstum einer Kaninchenpopulation:

Fibonacci-Zahlen

Problem

Betrachte das Wachstum einer Kaninchenpopulation:

- *Zu Beginn gibt es ein Paar geschlechtsreifer Kaninchen.*

Fibonacci-Zahlen

Problem

Betrachte das Wachstum einer Kaninchenpopulation:

- *Zu Beginn gibt es ein Paar geschlechtsreifer Kaninchen.*
- *Jedes neugeborene Paar wird im zweiten Lebensmonat geschlechtsreif.*

Fibonacci-Zahlen

Problem

Betrachte das Wachstum einer Kaninchenpopulation:

- *Zu Beginn gibt es ein Paar geschlechtsreifer Kaninchen.*
- *Jedes neugeborene Paar wird im zweiten Lebensmonat geschlechtsreif.*
- *Jedes geschlechtsreife Paar wirft pro Monat ein weiteres Paar.*

Fibonacci-Zahlen

Problem

Betrachte das Wachstum einer Kaninchenpopulation:

- *Zu Beginn gibt es ein Paar geschlechtsreifer Kaninchen.*
- *Jedes neugeborene Paar wird im zweiten Lebensmonat geschlechtsreif.*
- *Jedes geschlechtsreife Paar wirft pro Monat ein weiteres Paar.*
- *Sie sterben nie und hören niemals auf.*

Fibonacci-Zahlen

Problem

Betrachte das Wachstum einer Kaninchenpopulation:

- *Zu Beginn gibt es ein Paar geschlechtsreifer Kaninchen.*
- *Jedes neugeborene Paar wird im zweiten Lebensmonat geschlechtsreif.*
- *Jedes geschlechtsreife Paar wirft pro Monat ein weiteres Paar.*
- *Sie sterben nie und hören niemals auf.*

Lösung

Die Anzahl der Kaninchenpaare lässt sich wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned} \mathit{Fib}(0) &= 0 \\ \mathit{Fib}(1) &= 1 \\ \mathit{Fib}(n+2) &= \mathit{Fib}(n+1) + \mathit{Fib}(n) \qquad \textit{für } n \geqslant 0. \end{aligned}$$

Fibonacci-Zahlen

Problem

Betrachte das Wachstum einer Kaninchenpopulation:

- *Zu Beginn gibt es ein Paar geschlechtsreifer Kaninchen.*
- *Jedes neugeborene Paar wird im zweiten Lebensmonat geschlechtsreif.*
- *Jedes geschlechtsreife Paar wirft pro Monat ein weiteres Paar.*
- *Sie sterben nie und hören niemals auf.*

Lösung

Die Anzahl der Kaninchenpaare lässt sich wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned} Fib(0) &= 0 \\ Fib(1) &= 1 \\ Fib(n+2) &= Fib(n+1) + Fib(n) \qquad \textit{für } n \geqslant 0. \end{aligned}$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
$Fib(n)$	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	...

Naiver, rekursiver Algorithmus

Rekursiver Algorithmus

```
int fibRec(int n) {
  if (n == 0 || n == 1) {
    return n;
  }
  return fibRec(n - 1) + fibRec(n - 2);
}
```

Naiver, rekursiver Algorithmus

Rekursiver Algorithmus

```
int fibRec(int n) {
  if (n == 0 || n == 1) {
    return n;
  }
  return fibRec(n - 1) + fibRec(n - 2);
}
```

Die zur Berechnung von `fibRec(n)` benötigte Anzahl arithmetischer Operationen $T_{fibRec}(n)$ ist durch folgende Rekursionsgleichung gegeben:

$$\begin{aligned} T_{fibRec}(0) &= 0 \\ T_{fibRec}(1) &= 0 \\ T_{fibRec}(n+2) &= T_{fibRec}(n+1) + T_{fibRec}(n) + 3 \quad \text{für } n \geqslant 0. \end{aligned}$$

Rekursionsgleichungen

Naiver, rekursiver Algorithmus

Rekursiver Algorithmus

```
int fibRec(int n) {
  if (n == 0 || n == 1) {
    return n;
  }
  return fibRec(n - 1) + fibRec(n - 2);
}
```

Die zur Berechnung von `fibRec(n)` benötigte Anzahl arithmetischer Operationen $T_{\mathit{fibRec}}(n)$ ist durch folgende Rekursionsgleichung gegeben:

$$\begin{aligned} T_{\mathit{fibRec}}(0) &= 0 \\ T_{\mathit{fibRec}}(1) &= 0 \\ T_{\mathit{fibRec}}(n{+}2) &= T_{\mathit{fibRec}}(n{+}1) + T_{\mathit{fibRec}}(n) + 3 \qquad \text{für } n \geqslant 0. \end{aligned}$$

Zur Ermittlung der Zeitkomplexitätsklasse von `fibRec` löst man diese Gleichung.

Analyse: Anwendung der „Substitutionsmethode“

Problem

$$
\begin{aligned}
T_{fibRec}(0) &= 0 \\
T_{fibRec}(1) &= 0 \\
T_{fibRec}(n+2) &= T_{fibRec}(n+1) + T_{fibRec}(n) + 3 \qquad \textit{für } n \geqslant 0.
\end{aligned}
$$

Analyse: Anwendung der „Substitutionsmethode“

Problem

$$
\begin{aligned}
T_{\mathit{fibRec}}(0) &= 0 \\
T_{\mathit{fibRec}}(1) &= 0 \\
T_{\mathit{fibRec}}(n+2) &= T_{\mathit{fibRec}}(n+1) + T_{\mathit{fibRec}}(n) + 3 \qquad \textit{für } n \geqslant 0.
\end{aligned}
$$

Lösung (mittels vollständiger Induktion)

$T_{\mathit{fibRec}}(n) = 3 \cdot \mathit{Fib}(n+1) - 3.$

Analyse: Anwendung der „Substitutionsmethode"

Problem

$$\begin{aligned} T_{fibRec}(0) &= 0 \\ T_{fibRec}(1) &= 0 \\ T_{fibRec}(n+2) &= T_{fibRec}(n+1) + T_{fibRec}(n) + 3 \qquad \text{für } n \geqslant 0. \end{aligned}$$

Lösung (mittels vollständiger Induktion)

$T_{fibRec}(n) = 3 \cdot Fib(n+1) - 3.$

Fakt

$2^{(n-2)/2} \leqslant Fib(n) \leqslant 2^{n-2}$ für $n > 1$.

Analyse: Anwendung der „Substitutionsmethode“

Problem

$$T_{fibRec}(0) = 0$$
$$T_{fibRec}(1) = 0$$
$$T_{fibRec}(n+2) = T_{fibRec}(n+1) + T_{fibRec}(n) + 3 \qquad \textit{für } n \geqslant 0.$$

Lösung (mittels vollständiger Induktion)

$T_{fibRec}(n) = 3 \cdot Fib(n+1) - 3.$

Fakt

$2^{(n-2)/2} \leqslant Fib(n) \leqslant 2^{n-2}$ für $n > 1$.

Damit ergibt sich:

$T_{fibRec}(n) \in \Theta(2^n)$,

Analyse: Anwendung der „Substitutionsmethode“

Problem

$$T_{fibRec}(0) = 0$$
$$T_{fibRec}(1) = 0$$
$$T_{fibRec}(n+2) = T_{fibRec}(n+1) + T_{fibRec}(n) + 3 \qquad \text{für } n \geqslant 0.$$

Lösung (mittels vollständiger Induktion)

$T_{fibRec}(n) = 3 \cdot Fib(n+1) - 3.$

Fakt

$2^{(n-2)/2} \leqslant Fib(n) \leqslant 2^{n-2}$ für $n > 1$.

Damit ergibt sich:

$T_{fibRec}(n) \in \Theta(2^n)$, oft abgekürzt dargestellt als $fibRec(n) \in \Theta(2^n)$.

Ein iterativer Algorithmus

Iterativer Algorithmus

```
int fibIter(int n) {
  int f[n];
  f[0] = 0; f[1] = 1;
  for (int i = 2; i <= n; i++) {
      f[i] = f[i-1] + f[i-2];
  }
  return f[n];
}
```

Ein iterativer Algorithmus

Iterativer Algorithmus

```
int fibIter(int n) {
  int f[n];
  f[0] = 0; f[1] = 1;
  for (int i = 2; i <= n; i++) {
      f[i] = f[i-1] + f[i-2];
  }
  return f[n];
}
```

Die benötigte Anzahl arithmetischer Operationen $T_{fibIter}(n)$ ist:

$$T_{fibIter}(0) = 0 \quad \text{und} \quad T_{fibIter}(1) = 0$$

$$T_{fibIter}(n+2) = 3 \cdot (n+1) \qquad \text{für } n \geqslant 0.$$

Ein iterativer Algorithmus

Iterativer Algorithmus

```
int fibIter(int n) {
  int f[n];
  f[0] = 0; f[1] = 1;
  for (int i = 2; i <= n; i++) {
      f[i] = f[i-1] + f[i-2];
  }
  return f[n];
}
```

Die benötigte Anzahl arithmetischer Operationen $T_{fibIter}(n)$ ist:

$$T_{fibIter}(0) = 0 \quad \text{und} \quad T_{fibIter}(1) \;=\; 0$$

$$T_{fibIter}(n+2) = 3 \cdot (n+1) \qquad \text{für } n \geqslant 0.$$

Damit ergibt sich:

$T_{fibIter}(n) \in \Theta(n)$, oder als Kurzschreibweise *fibIter*$(n) \in \Theta(n)$.

Ein iterativer Algorithmus (2)

Jedoch: der `fibIter` Algorithmus hat eine Speicherkomplexität in $\Theta(n)$.

Ein iterativer Algorithmus (2)

Jedoch: der `fibIter` Algorithmus hat eine Speicherkomplexität in $\Theta(n)$.

Beobachtung: jeder Durchlauf "benutzt" nur die Werte `f[i-1]` und `f[i-2]`.

Ein iterativer Algorithmus (2)

Jedoch: der `fibIter` Algorithmus hat eine Speicherkomplexität in $\Theta(n)$.

Beobachtung: jeder Durchlauf "benutzt" nur die Werte `f[i-1]` und `f[i-2]`.

Zwei Variablen reichen also aus, um diese Werte zu speichern.

Ein iterativer Algorithmus (2)

Jedoch: der `fibIter` Algorithmus hat eine Speicherkomplexität in $\Theta(n)$.

Beobachtung: jeder Durchlauf "benutzt" nur die Werte `f[i-1]` und `f[i-2]`.

Zwei Variablen reichen also aus, um diese Werte zu speichern.

Iterativer Algorithmus

```
int fibIter2(int n) {
  int a = 0; int b = 1;
  for (int i = 2; i <= n; i++) {
    c = a + b;
    a = b;
    b = c;
  }
  return b;
}
```

Ein iterativer Algorithmus (2)

Jedoch: der `fibIter` Algorithmus hat eine Speicherkomplexität in $\Theta(n)$.

Beobachtung: jeder Durchlauf "benutzt" nur die Werte `f[i-1]` und `f[i-2]`.

Zwei Variablen reichen also aus, um diese Werte zu speichern.

Iterativer Algorithmus

```
int fibIter2(int n) {
  int a = 0; int b = 1;
  for (int i = 2; i <= n; i++) {
    c = a + b;
    a = b;
    b = c;
  }
  return b;
}
```

Der `fibIter2` Algorithmus hat eine Speicherkomplexität in $\Theta(1)$ und $T_{fibIter2}(n) \in \Theta(n)$.

Ein Matrixpotenz-Algorithmus

Matrixdarstellung der Fibonacci-Zahlen

Es gilt für $n > 0$:

$$\begin{pmatrix} Fib(n{+}2) \\ Fib(n{+}1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Fib(n{+}1) \\ Fib(n) \end{pmatrix}$$

Ein Matrixpotenz-Algorithmus

Matrixdarstellung der Fibonacci-Zahlen

Es gilt für $n > 0$:

$$\begin{pmatrix} Fib(n+2) \\ Fib(n+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Fib(n+1) \\ Fib(n) \end{pmatrix}$$

Damit lässt sich $Fib(n+2)$ durch Matrixpotenzierung berechnen:

$$\begin{pmatrix} Fib(n+2) \\ Fib(n+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 \cdot \begin{pmatrix} Fib(n) \\ Fib(n-1) \end{pmatrix} = \ldots = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n} \cdot \begin{pmatrix} Fib(2) \\ Fib(1) \end{pmatrix}$$

Ein Matrixpotenz-Algorithmus

Matrixdarstellung der Fibonacci-Zahlen

Es gilt für $n > 0$:

$$\begin{pmatrix} Fib(n+2) \\ Fib(n+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Fib(n+1) \\ Fib(n) \end{pmatrix}$$

Damit lässt sich $Fib(n+2)$ durch Matrixpotenzierung berechnen:

$$\begin{pmatrix} Fib(n+2) \\ Fib(n+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 \cdot \begin{pmatrix} Fib(n) \\ Fib(n-1) \end{pmatrix} = \ldots = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{\color{red}{n}} \cdot \begin{pmatrix} Fib(2) \\ Fib(1) \end{pmatrix}$$

- Wie können wir Matrixpotenzen effizient berechnen?

Ein Matrixpotenz-Algorithmus

Matrixdarstellung der Fibonacci-Zahlen

Es gilt für $n > 0$:

$$\begin{pmatrix} Fib(n{+}2) \\ Fib(n{+}1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Fib(n{+}1) \\ Fib(n) \end{pmatrix}$$

Damit lässt sich $Fib(n{+}2)$ durch Matrixpotenzierung berechnen:

$$\begin{pmatrix} Fib(n{+}2) \\ Fib(n{+}1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 \cdot \begin{pmatrix} Fib(n) \\ Fib(n{-}1) \end{pmatrix} = \ldots = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n} \cdot \begin{pmatrix} Fib(2) \\ Fib(1) \end{pmatrix}$$

- Wie können wir Matrixpotenzen effizient berechnen?
- Dies betrachten wir hier nicht im Detail; geht in $\Theta(\log(n))$

Praktische Konsequenzen

Beispiel

Größte lösbare Eingabelänge für angenommene 1 μs pro Operation:

Verfügbare Zeit	Rekursiv	Iterativ	Matrix
1 ms	14	500	10^{12}
1 s	28	$5 \cdot 10^5$	$10^{12\,000}$
1 m	37	$3 \cdot 10^7$	$10^{700\,000}$
1 h	45	$1{,}8 \cdot 10^9$	10^{10^6}

Lösbare Eingabelänge

Vereinfachende Annahmen:

Praktische Konsequenzen

Beispiel

Größte lösbare Eingabelänge für angenommene 1 µs pro Operation:

Verfügbare Zeit	Rekursiv	Iterativ	Matrix
1 ms	14	500	10^{12}
1 s	28	$5 \cdot 10^5$	$10^{12\,000}$
1 m	37	$3 \cdot 10^7$	$10^{700\,000}$
1 h	45	$1{,}8 \cdot 10^9$	10^{10^6}
	Lösbare Eingabelänge		

Vereinfachende Annahmen:

- Nur arithmetische Operationen wurden berücksichtigt.

Praktische Konsequenzen

Beispiel

Größte lösbare Eingabelänge für angenommene 1 µs pro Operation:

Verfügbare Zeit	Rekursiv	Iterativ	Matrix
1 ms	14	500	10^{12}
1 s	28	$5 \cdot 10^5$	$10^{12\,000}$
1 m	37	$3 \cdot 10^7$	$10^{700\,000}$
1 h	45	$1{,}8 \cdot 10^9$	10^{10^6}

Lösbare Eingabelänge

Vereinfachende Annahmen:

- Nur arithmetische Operationen wurden berücksichtigt.
- Die Laufzeit der arithmetischen Operationen ist fix, also nicht von ihren jeweiligen Argumenten abhängig.

Rekursionsgleichungen von Programmcode ableiten

Rekursionsgleichung im Worst-Case

Zur Ermittlung der Worst-Case Laufzeit $T(n)$ zerlegen wir das Programm:

- Die Kosten aufeinanderfolgender Blöcke werden addiert.

Rekursionsgleichungen von Programmcode ableiten

Rekursionsgleichung im Worst-Case

Zur Ermittlung der Worst-Case Laufzeit $T(n)$ zerlegen wir das Programm:

- Die Kosten aufeinanderfolgender Blöcke werden addiert.
- Von alternativen Blöcken wird das Maximum genommen.

Rekursionsgleichungen von Programmcode ableiten

Rekursionsgleichung im Worst-Case

Zur Ermittlung der Worst-Case Laufzeit $T(n)$ zerlegen wir das Programm:

- Die Kosten aufeinanderfolgender Blöcke werden addiert.
- Von alternativen Blöcken wird das Maximum genommen.
- Beim Aufruf von Unterprogrammen (etwa `sub1()`) wird $T_{sub1}(f(n))$ genommen, wobei $f(n)$ die Länge der Parameter beim Funktionsaufruf —abhängig von der Eingabelänge n des Programms— ist.

Rekursionsgleichungen von Programmcode ableiten

Rekursionsgleichung im Worst-Case

Zur Ermittlung der Worst-Case Laufzeit $T(n)$ zerlegen wir das Programm:

- Die Kosten aufeinanderfolgender Blöcke werden addiert.
- Von alternativen Blöcken wird das Maximum genommen.
- Beim Aufruf von Unterprogrammen (etwa `sub1()`) wird $T_{sub1}(f(n))$ genommen, wobei $f(n)$ die Länge der Parameter beim Funktionsaufruf —abhängig von der Eingabelänge n des Programms— ist.
- Rekursive Aufrufe werden mit $T(g(n))$ veranschlagt; $g(n)$ gibt wieder die von n abgeleitete Länge der Aufrufparameter an.

Übersicht

1. Binäre Suche
   - Was ist binäre Suche?
   - Worst-Case Analyse von Binärer Suche

2. Rekursionsgleichungen
   - Fibonacci-Zahlen
   - Ermittlung von Rekursionsgleichungen

3. Lösen von Rekursionsgleichungen
   - Die Substitutionsmethode
   - Rekursionsbäume

Einige Vereinfachungen

- Wenn wir Rekursionsgleichungen aufstellen und lösen, vernachlässigen wir häufig das Runden auf ganze Zahlen, z. B.:

$$T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 3 \quad \text{wird} \quad T(n) = 2T(n/2) + 3.$$

Einige Vereinfachungen

- Wenn wir Rekursionsgleichungen aufstellen und lösen, vernachlässigen wir häufig das Runden auf ganze Zahlen, z. B.:

$$T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 3 \quad \text{wird} \quad T(n) = 2T(n/2) + 3.$$

- Manchmal wird angenommen, daß $T(n)$ für kleine n konstant ist anstatt genau festzustellen was $T(0)$ und $T(1)$ ist. Also z. B.:

$$T(0) = c \text{ und } T(1) = c' \quad \text{statt} \quad T(0) = 4 \text{ und } T(1) = 7.$$

Einige Vereinfachungen

- Wenn wir Rekursionsgleichungen aufstellen und lösen, vernachlässigen wir häufig das Runden auf ganze Zahlen, z. B.:

$$T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 3 \quad \text{wird} \quad T(n) = 2T(n/2) + 3.$$

- Manchmal wird angenommen, daß $T(n)$ für kleine n konstant ist anstatt genau festzustellen was $T(0)$ und $T(1)$ ist. Also z. B.:

$$T(0) = c \text{ und } T(1) = c' \quad \text{statt} \quad T(0) = 4 \text{ und } T(1) = 7.$$

- Wir nehmen an, dass die Funktionen nur ganzzahlige Argumente haben, z. B.:

$$T(n) = T(\sqrt{n}) + n \quad \text{bedeutet} \quad T(n) = T(\lfloor \sqrt{n} \rfloor) + n.$$

Einige Vereinfachungen

- Wenn wir Rekursionsgleichungen aufstellen und lösen, vernachlässigen wir häufig das Runden auf ganze Zahlen, z. B.:

$$T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 3 \quad \text{wird} \quad T(n) = 2T(n/2) + 3.$$

- Manchmal wird angenommen, daß $T(n)$ für kleine n konstant ist anstatt genau festzustellen was $T(0)$ und $T(1)$ ist. Also z. B.:

$$T(0) = c \text{ und } T(1) = c' \quad \text{statt} \quad T(0) = 4 \text{ und } T(1) = 7.$$

- Wir nehmen an, dass die Funktionen nur ganzzahlige Argumente haben, z. B.:

$$T(n) = T(\sqrt{n}) + n \quad \text{bedeutet} \quad T(n) = T(\lfloor \sqrt{n} \rfloor) + n.$$

- Grund: die Lösung wird typischerweise nur um einen konstanten Faktor verändert, aber der Wachstumgrad bleibt unverändert.

Lösen von Rekursionsgleichungen

Einfache Fälle

Für einfache Fälle gibt es geschlossene Lösungen, z. B. für $k, c \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} T(0) &= k \\ T(n+1) &= c \cdot T(n) \quad \text{für } n \geqslant 0 \end{aligned}$$

hat die eindeutige Lösung $T(n) = c^n \cdot k$.

Lösen von Rekursionsgleichungen

Einfache Fälle

Für einfache Fälle gibt es geschlossene Lösungen, z. B. für $k, c \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} T(0) &= k \\ T(n{+}1) &= c \cdot T(n) \quad \text{für } n \geqslant 0 \end{aligned}$$

hat die eindeutige Lösung $T(n) = c^n \cdot k$.

Und die Rekursionsgleichung:

$$\begin{aligned} T(0) &= k \\ T(n{+}1) &= T(n) + f(n) \quad \text{für } n \geqslant 0 \end{aligned}$$

hat die eindeutige Lösung $T(n) = T(0) + \sum_{i=1}^{n} f(i)$.

Lösen von Rekursionsgleichungen

Einfache Fälle

Für einfache Fälle gibt es geschlossene Lösungen, z. B. für $k, c \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} T(0) &= k \\ T(n+1) &= c \cdot T(n) \quad \text{für } n \geqslant 0 \end{aligned}$$

hat die eindeutige Lösung $T(n) = c^n \cdot k$.

Und die Rekursionsgleichung:

$$\begin{aligned} T(0) &= k \\ T(n+1) &= T(n) + f(n) \quad \text{für } n \geqslant 0 \end{aligned}$$

hat die eindeutige Lösung $T(n) = T(0) + \sum_{i=1}^{n} f(i)$.

Bei der Zeitkomplexitätsanalyse treten solche Fälle jedoch selten auf.

Lösen von Rekursionsgleichungen

Allgemeines Format der Rekursionsgleichung

Im allgemeinen Fall – der hier häufig auftritt – gibt es keine geschlossene Lösung.

Lösen von Rekursionsgleichungen

Allgemeines Format der Rekursionsgleichung

Im allgemeinen Fall – der hier häufig auftritt – gibt es keine geschlossene Lösung.

Der typische Fall sieht folgendermaßen aus:

$$T(n) = b \cdot T\left(\frac{n}{c}\right) + f(n)$$

wobei $b > 0$, $c > 1$ gilt und $f(n)$ eine gegebene Funktion ist.

Lösen von Rekursionsgleichungen

Allgemeines Format der Rekursionsgleichung

Im allgemeinen Fall – der hier häufig auftritt – gibt es keine geschlossene Lösung.

Der typische Fall sieht folgendermaßen aus:

$$T(n) = b \cdot T\left(\frac{n}{c}\right) + f(n)$$

wobei $b > 0$, $c > 1$ gilt und $f(n)$ eine gegebene Funktion ist.

Intuition:

- Das zu analysierende Problem teilt sich jeweils in b Teilprobleme auf.

Lösen von Rekursionsgleichungen

Allgemeines Format der Rekursionsgleichung

Im allgemeinen Fall – der hier häufig auftritt – gibt es keine geschlossene Lösung.

Der typische Fall sieht folgendermaßen aus:

$$T(n) = b \cdot T\left(\frac{n}{c}\right) + f(n)$$

wobei $b > 0$, $c > 1$ gilt und $f(n)$ eine gegebene Funktion ist.

Intuition:

- Das zu analysierende Problem teilt sich jeweils in b Teilprobleme auf.
- Jedes dieser Teilprobleme hat die Größe $\frac{n}{c}$.

Lösen von Rekursionsgleichungen

Allgemeines Format der Rekursionsgleichung

Im allgemeinen Fall – der hier häufig auftritt – gibt es keine geschlossene Lösung.

Der typische Fall sieht folgendermaßen aus:

$$T(n) = b \cdot T\left(\frac{n}{c}\right) + f(n)$$

wobei $b > 0$, $c > 1$ gilt und $f(n)$ eine gegebene Funktion ist.

Intuition:

- Das zu analysierende Problem teilt sich jeweils in b Teilprobleme auf.
- Jedes dieser Teilprobleme hat die Größe $\frac{n}{c}$.
- Die Kosten für das Aufteilen eines Problems und Kombinieren der Teillösungen sind $f(n)$.

Die Substitutionsmethode

Substitutionsmethode

Die Substitutionsmethode besteht aus zwei Schritten:

1. Rate die Form der Lösung, durch z. B.:

Die Substitutionsmethode

Substitutionsmethode

Die Substitutionsmethode besteht aus zwei Schritten:

1. Rate die Form der Lösung, durch z. B.:
   - Scharfes Hinsehen, kurze Eingaben ausprobieren und einsetzen

Die Substitutionsmethode

Substitutionsmethode

Die Substitutionsmethode besteht aus zwei Schritten:

1. Rate die Form der Lösung, durch z. B.:
   - Scharfes Hinsehen, kurze Eingaben ausprobieren und einsetzen
   - Betrachtung des Rekursionsbaums

Die Substitutionsmethode

Substitutionsmethode

Die Substitutionsmethode besteht aus zwei Schritten:

1. Rate die Form der Lösung, durch z. B.:
   - Scharfes Hinsehen, kurze Eingaben ausprobieren und einsetzen
   - Betrachtung des Rekursionsbaums
2. Vollständige Induktion, um die Konstanten zu finden und zu zeigen, dass die Lösung funktioniert.

Die Substitutionsmethode

Substitutionsmethode

Die Substitutionsmethode besteht aus zwei Schritten:

1. Rate die Form der Lösung, durch z. B.:
   - Scharfes Hinsehen, kurze Eingaben ausprobieren und einsetzen
   - Betrachtung des Rekursionsbaums
2. Vollständige Induktion, um die Konstanten zu finden und zu zeigen, dass die Lösung funktioniert.

Einige Hinweise

- Diese Methode ist sehr leistungsfähig, aber

Die Substitutionsmethode

Substitutionsmethode

Die Substitutionsmethode besteht aus zwei Schritten:

1. Rate die Form der Lösung, durch z. B.:
   - Scharfes Hinsehen, kurze Eingaben ausprobieren und einsetzen
   - Betrachtung des Rekursionsbaums
2. Vollständige Induktion, um die Konstanten zu finden und zu zeigen, dass die Lösung funktioniert.

Einige Hinweise

- Diese Methode ist sehr leistungsfähig, aber
- kann nur in den Fällen angewendet werden, in denen es relativ einfach ist, die Form der Lösung zu erraten.

Die Substitutionsmethode: Beispiel

Beispiel

Betrachte folgende Rekursionsgleichung:

$$T(1) = 1$$
$$T(n) = 2 \cdot T(n/2) + n \quad \text{für } n > 1.$$

Die Substitutionsmethode: Beispiel

Beispiel

Betrachte folgende Rekursionsgleichung:

$$T(1) = 1$$
$$T(n) = 2 \cdot T(n/2) + n \quad \text{für } n > 1.$$

- Wir vermuten als Lösung $T(n) \in O(n \cdot \log(n))$.

Die Substitutionsmethode: Beispiel

Beispiel

Betrachte folgende Rekursionsgleichung:

$$T(1) = 1$$
$$T(n) = 2 \cdot T(n/2) + n \quad \text{für } n > 1.$$

- Wir vermuten als Lösung $T(n) \in O(n \cdot \log(n))$.
- Dazu müssen wir $T(n) \leqslant c \cdot n \cdot \log(n)$ zeigen, für ein geeignetes $c > 0$.

Die Substitutionsmethode: Beispiel

Beispiel

Betrachte folgende Rekursionsgleichung:

$$T(1) = 1$$
$$T(n) = 2 \cdot T(n/2) + n \quad \text{für } n > 1.$$

- Wir vermuten als Lösung $T(n) \in O(n \cdot \log(n))$.
- Dazu müssen wir $T(n) \leqslant c \cdot n \cdot \log(n)$ zeigen, für ein geeignetes $c > 0$.
- Bestimme, ob für ein geeignetes n_0 und für $n \geqslant n_0$ gilt, dass $T(n) \leqslant c \cdot n \cdot \log(n)$.

Die Substitutionsmethode: Beispiel

Beispiel

Betrachte folgende Rekursionsgleichung:

$$T(1) = 1$$
$$T(n) = 2 \cdot T(n/2) + n \quad \text{für } n > 1.$$

- Wir vermuten als Lösung $T(n) \in O(n \cdot \log(n))$.
- Dazu müssen wir $T(n) \leqslant c \cdot n \cdot \log(n)$ zeigen, für ein geeignetes $c > 0$.
- Bestimme, ob für ein geeignetes n_0 und für $n \geqslant n_0$ gilt, dass $T(n) \leqslant c \cdot n \cdot \log(n)$.
- Stelle fest, dass $T(1) = 1 \leqslant c \cdot 1 \cdot \log(1) = 0$ verletzt ist.

Die Substitutionsmethode: Beispiel

Beispiel

Betrachte folgende Rekursionsgleichung:

$$T(1) = 1$$
$$T(n) = 2 \cdot T(n/2) + n \quad \text{für } n > 1.$$

- Wir vermuten als Lösung $T(n) \in O(n \cdot \log(n))$.
- Dazu müssen wir $T(n) \leqslant c \cdot n \cdot \log(n)$ zeigen, für ein geeignetes $c > 0$.
- Bestimme, ob für ein geeignetes n_0 und für $n \geqslant n_0$ gilt, dass $T(n) \leqslant c \cdot n \cdot \log(n)$.
- Stelle fest, dass $T(1) = 1 \leqslant c \cdot 1 \cdot \log(1) = 0$ verletzt ist.
- Es gilt: $T(2) = 4 \leqslant c \cdot 2 \log(2)$ und $T(3) = 5 \leqslant c \cdot 3 \log(3)$ für $c \geqslant 2$

Die Substitutionsmethode: Beispiel

Beispiel

Betrachte folgende Rekursionsgleichung:

$$T(1) = 1$$
$$T(n) = 2 \cdot T(n/2) + n \quad \text{für } n > 1.$$

- Wir vermuten als Lösung $T(n) \in O(n \cdot \log(n))$.
- Dazu müssen wir $T(n) \leqslant c \cdot n \cdot \log(n)$ zeigen, für ein geeignetes $c > 0$.
- Bestimme, ob für ein geeignetes n_0 und für $n \geqslant n_0$ gilt, dass $T(n) \leqslant c \cdot n \cdot \log(n)$.
- Stelle fest, dass $T(1) = 1 \leqslant c \cdot 1 \cdot \log(1) = 0$ verletzt ist.
- Es gilt: $T(2) = 4 \leqslant c \cdot 2 \log(2)$ und $T(3) = 5 \leqslant c \cdot 3 \log(3)$ für $c \geqslant 2$
- Überprüfe dann durch Substitution und Induktion (s. nächste Folie)

Die Substitutionsmethode: Beispiel

Beispiel

Betrachte folgende Rekursionsgleichung:

$$T(1) = 1$$
$$T(n) = 2 \cdot T(n/2) + n \quad \text{für } n > 1.$$

- Wir vermuten als Lösung $T(n) \in O(n \cdot \log(n))$.
- Dazu müssen wir $T(n) \leqslant c \cdot n \cdot \log(n)$ zeigen, für ein geeignetes $c > 0$.
- Bestimme, ob für ein geeignetes n_0 und für $n \geqslant n_0$ gilt, dass $T(n) \leqslant c \cdot n \cdot \log(n)$.
- Stelle fest, dass $T(1) = 1 \leqslant c \cdot 1 \cdot \log(1) = 0$ verletzt ist.
- Es gilt: $T(2) = 4 \leqslant c \cdot 2 \log(2)$ und $T(3) = 5 \leqslant c \cdot 3 \log(3)$ für $c \geqslant 2$
- Überprüfe dann durch Substitution und Induktion (s. nächste Folie)
- Damit gilt für jedes $c \geqslant 2$ und $n \geqslant n_0 > 1$, dass $T(n) \leqslant c \cdot n \cdot \log(n)$.

Die Substitutionsmethode: Beispiel

Beispiel

$T(n) = 2 \cdot T(n/2) + n$ für $n > 1$, und $T(1) = 1$

Die Substitutionsmethode: Beispiel

Beispiel

$T(n) = 2 \cdot T(n/2) + n$ für $n > 1$, und $T(1) = 1$

$$T(n) = \; 2 \cdot T(n/2) + n$$

Die Substitutionsmethode: Beispiel

Beispiel

$T(n) = 2 \cdot T(n/2) + n$ für $n > 1$, und $T(1) = 1$

$$\begin{aligned} T(n) = &\ 2 \cdot T(n/2) + n && \mid \text{Induktionshypothese} \\ \leqslant &\ 2\,(c \cdot n/2 \cdot \log(n/2)) + n \end{aligned}$$

Die Substitutionsmethode: Beispiel

Beispiel

$T(n) = 2 \cdot T(n/2) + n$ für $n > 1$, und $T(1) = 1$

$$
\begin{aligned}
T(n) = \; & 2 \cdot T(n/2) + n && \mid \text{Induktionshypothese} \\
\leqslant \; & 2\,(c{\cdot}n/2{\cdot}\log(n/2)) + n \\
= \; & c{\cdot}n{\cdot}\log(n/2) + n
\end{aligned}
$$

Die Substitutionsmethode: Beispiel

Beispiel

$T(n) = 2 \cdot T(n/2) + n$ für $n > 1$, und $T(1) = 1$

$$
\begin{aligned}
T(n) = \ & 2 \cdot T(n/2) + n && \mid \text{Induktionshypothese} \\
\leqslant & \ 2\,(c{\cdot}n/2{\cdot}\log(n/2)) + n && \\
= & \ c{\cdot}n{\cdot}\log(n/2) + n && \mid \text{log-Rechnung: } (\log \equiv \log_2) \\
 & && \mid \log(n/2) = \log(n) - \log(2) \\
= & \ c{\cdot}n{\cdot}\log(n) - c{\cdot}n{\cdot}\log(2) + n &&
\end{aligned}
$$

Die Substitutionsmethode: Beispiel

Beispiel

$T(n) = 2 \cdot T(n/2) + n$ für $n > 1$, und $T(1) = 1$

$$
\begin{aligned}
T(n) = {} & 2 \cdot T(n/2) + n && \mid \text{Induktionshypothese} \\
\leqslant {} & 2\,(c{\cdot}n/2{\cdot}\log(n/2)) + n \\
= {} & c{\cdot}n{\cdot}\log(n/2) + n && \mid \text{log-Rechnung: } (\log \equiv \log_2) \\
&&& \mid \log(n/2) = \log(n) - \log(2) \\
= {} & c{\cdot}n{\cdot}\log(n) - c{\cdot}n{\cdot}\log(2) + n \\
\leqslant {} & c{\cdot}n{\cdot}\log(n) - c{\cdot}n + n
\end{aligned}
$$

Die Substitutionsmethode: Beispiel

Beispiel

$T(n) = 2 \cdot T(n/2) + n$ für $n > 1$, und $T(1) = 1$

$$
\begin{aligned}
T(n) = {} & 2 \cdot T(n/2) + n && \mid \text{Induktionshypothese} \\
& \leqslant 2\,(c \cdot n/2 \cdot \log(n/2)) + n \\
& = c \cdot n \cdot \log(n/2) + n && \left|\ \begin{array}{l} \text{log-Rechnung: } (\log \equiv \log_2) \\ \log(n/2) = \log(n) - \log(2) \end{array}\right. \\
& = c \cdot n \cdot \log(n) - c \cdot n \cdot \log(2) + n \\
& \leqslant c \cdot n \cdot \log(n) - c \cdot n + n && \mid \text{mit } c > 1 \text{ folgt sofort:} \\
& \leqslant c \cdot n \cdot \log(n)
\end{aligned}
$$

Die Substitutionsmethode: Feinheiten

Einige wichtige Hinweise

1. Die asymptotische Schranke ist korrekt erraten, kann aber manchmal nicht mittels vollständiger Induktion bewiesen werden.

Die Substitutionsmethode: Feinheiten

Einige wichtige Hinweise

1. Die asymptotische Schranke ist korrekt erraten, kann aber manchmal nicht mittels vollständiger Induktion bewiesen werden.

   Das Problem ist gewöhnlich, dass die Induktionsannahme nicht streng genug ist.

Die Substitutionsmethode: Feinheiten

Einige wichtige Hinweise

1. Die asymptotische Schranke ist korrekt erraten, kann aber manchmal nicht mittels vollständiger Induktion bewiesen werden.

   Das Problem ist gewöhnlich, dass die Induktionsannahme nicht streng genug ist.

2. Manchmal ist eine Variablentransformation hilfreich, um zu einer Lösung zu geraten:

Die Substitutionsmethode: Variablentransformation

Beispiel

$T(n) = 2 \cdot T\left(\sqrt{n}\right) + \log(n)$ für $n > 0$

Die Substitutionsmethode: Variablentransformation

Beispiel

$T(n) = 2 \cdot T(\sqrt{n}) + \log(n)$ für $n > 0$

$$T(n) = 2 \cdot T(\sqrt{n}) + \log(n)$$

Die Substitutionsmethode: Variablentransformation

Beispiel

$T(n) = 2 \cdot T\left(\sqrt{n}\right) + \log(n)$ für $n > 0$

$$T(n) = 2 \cdot T\left(\sqrt{n}\right) + \log(n) \qquad \mid \text{Variablentransformation } m = \log(n)$$

$$\Leftrightarrow \; T(2^m) = 2 \cdot T\left(2^{m/2}\right) + m$$

also $n = 2^m$

$\sqrt{n} = n^{1/2} = (2^m)^{1/2} = 2^{m/2}$

Die Substitutionsmethode: Variablentransformation

Beispiel

$T(n) = 2 \cdot T\left(\sqrt{n}\right) + \log(n)$ für $n > 0$

$$
\begin{aligned}
& T(n) = 2 \cdot T\left(\sqrt{n}\right) + \log(n) && \mid \text{Variablentransformation } m = \log(n) \\
\Leftrightarrow\ & T(2^m) = 2 \cdot T\left(2^{m/2}\right) + m && \mid \text{Umbenennung } T(2^m) = S(m) \\
\Leftrightarrow\ & S(m) = 2 \cdot S(m/2) + m
\end{aligned}
$$

Die Substitutionsmethode: Variablentransformation

Beispiel

$T(n) = 2 \cdot T\left(\sqrt{n}\right) + \log(n)$ für $n > 0$

$$
\begin{aligned}
& T(n) = 2 \cdot T\left(\sqrt{n}\right) + \log(n) && \mid \text{ Variablentransformation } m = \log(n) \\
\Leftrightarrow\ & T(2^m) = 2 \cdot T\left(2^{m/2}\right) + m && \mid \text{ Umbenennung } T(2^m) = S(m) \\
\Leftrightarrow\ & S(m) = 2 \cdot S(m/2) + m && \mid \text{ Lösung des vorherigen Beispiels} \\
\Leftrightarrow\ & S(m) \leqslant c \cdot m \cdot \log(m)
\end{aligned}
$$

Die Substitutionsmethode: Variablentransformation

Beispiel

$T(n) = 2 \cdot T\left(\sqrt{n}\right) + \log(n)$ für $n > 0$

$$
\begin{aligned}
& T(n) = 2 \cdot T\left(\sqrt{n}\right) + \log(n) && \mid \text{ Variablentransformation } m = \log(n) \\
\Leftrightarrow\ & T(2^m) = 2 \cdot T\left(2^{m/2}\right) + m && \mid \text{ Umbenennung } T(2^m) = S(m) \\
\Leftrightarrow\ & S(m) = 2 \cdot S(m/2) + m && \mid \text{ Lösung des vorherigen Beispiels} \\
\Leftrightarrow\ & S(m) \leqslant c \cdot m \cdot \log(m) \\
\Leftrightarrow\ & S(m) \in O\left(m \cdot \log(m)\right)
\end{aligned}
$$

Die Substitutionsmethode: Variablentransformation

Beispiel

$T(n) = 2 \cdot T\left(\sqrt{n}\right) + \log(n)$ für $n > 0$

$$
\begin{aligned}
& T(n) = 2 \cdot T\left(\sqrt{n}\right) + \log(n) && \mid \text{Variablentransformation } m = \log(n) \\
\Leftrightarrow\ & T(2^m) = 2 \cdot T\left(2^{m/2}\right) + m && \mid \text{Umbenennung } T(2^m) = S(m) \\
\Leftrightarrow\ & S(m) = 2 \cdot S(m/2) + m && \mid \text{Lösung des vorherigen Beispiels} \\
\Leftrightarrow\ & S(m) \leqslant c \cdot m \cdot \log(m) && \\
\Leftrightarrow\ & S(m) \in O\left(m \cdot \log(m)\right) && \mid m = \log(n) \\
\Leftrightarrow\ & T(n) \in O\left(\log(n) \cdot \log(\log(n))\right) &&
\end{aligned}
$$

Die Substitutionsmethode

Substitutionsmethode

Die Substitutionsmethode besteht aus zwei Schritten:

1. Rate die Form der Lösung, durch z. B.:

Die Substitutionsmethode

Substitutionsmethode

Die Substitutionsmethode besteht aus zwei Schritten:

1. Rate die Form der Lösung, durch z. B.:
   - Scharfes Hinsehen, kurze Eingaben ausprobieren und einsetzen

Die Substitutionsmethode

Substitutionsmethode

Die Substitutionsmethode besteht aus zwei Schritten:

1. Rate die Form der Lösung, durch z. B.:
   - Scharfes Hinsehen, kurze Eingaben ausprobieren und einsetzen
   - Betrachtung des Rekursionsbaums

Die Substitutionsmethode

Substitutionsmethode

Die Substitutionsmethode besteht aus zwei Schritten:

1. Rate die Form der Lösung, durch z. B.:
   - Scharfes Hinsehen, kurze Eingaben ausprobieren und einsetzen
   - Betrachtung des Rekursionsbaums
2. Vollständige Induktion, um die Konstanten zu finden und zu zeigen, dass die Lösung funktioniert.

Die Substitutionsmethode

Substitutionsmethode

Die Substitutionsmethode besteht aus zwei Schritten:

1. Rate die Form der Lösung, durch z. B.:
   - Scharfes Hinsehen, kurze Eingaben ausprobieren und einsetzen
   - Betrachtung des Rekursionsbaums
2. Vollständige Induktion, um die Konstanten zu finden und zu zeigen, dass die Lösung funktioniert.

Wir betrachten nun detaillierter, wie man die Form der Lösung raten kann.

Raten der Lösung durch Iteration

Grundidee

Wiederholtes Einsetzen der Rekursionsgleichung in sich selbst, bis man ein Muster erkennt.

Raten der Lösung durch Iteration

Grundidee

Wiederholtes Einsetzen der Rekursionsgleichung in sich selbst, bis man ein Muster erkennt.

Beispiel

$$T(n) = 3 \cdot T(n/4) + n$$

Sei n groß genug. Dann:

$$T(n) = 3 \cdot T\left(\frac{n}{4}\right) + n$$

$$= \left(* \quad T\left(\frac{n}{4}\right) = 3 \cdot T\left(\frac{n}{16}\right) + \frac{n}{4} \quad *\right)$$

$$= 3 \cdot \left(3 \cdot T\left(\frac{n}{16}\right) + \frac{n}{4}\right) + n$$

$$= 3^2 \, T\left(\frac{n}{16}\right) + \frac{3}{4} \cdot n + n$$

$$= \left(* \quad T\left(\frac{n}{16}\right) = 3 \cdot T\left(\frac{n}{64}\right) + \frac{n}{16} \quad *\right)$$

$$= 3^2 \left(3 \cdot T\left(\frac{n}{64}\right) + \frac{n}{16}\right) + \frac{3}{4} n + n$$

$$= 3^3 \, T\left(\frac{n}{64}\right) + \left(\frac{3}{4}\right)^2 n + \left(\frac{3}{4}\right)^1 n + \left(\frac{3}{4}\right)^0 n$$

usw.

Nehme an $T(1) = c$.

z.B

$$T(64) = 3^3 \cdot T(1) + \underbrace{\left(\frac{3}{4}\right)^2 n + \left(\frac{3}{4}\right)^1 n + \left(\frac{3}{4}\right)^0 n}$$

wie groß ist diese Konstante?

$$3^{\log_4 64}$$

$$= 64^{\log_4 3}$$

wieviele Terme?

$$\sum_{i=0}^{?} \left(\frac{3}{4}\right)^i \cdot n$$

genau $\log_4 64$

also $? = \log_4 64 - 1$.

(da $i = 0$ am start)

Raten der Lösung durch Iteration

Grundidee

Wiederholtes Einsetzen der Rekursionsgleichung in sich selbst, bis man ein Muster erkennt.

Beispiel

$$\begin{aligned} T(n) &= 3 \cdot T(n/4) + n && \mid \text{Einsetzen} \\ &= 3 \cdot (3 \cdot T(n/16) + n/4)) + n \end{aligned}$$

Raten der Lösung durch Iteration

Grundidee

Wiederholtes Einsetzen der Rekursionsgleichung in sich selbst, bis man ein Muster erkennt.

Beispiel

$$
\begin{aligned}
T(n) &= 3 \cdot T(n/4) + n && \mid \text{Einsetzen} \\
&= 3 \cdot (3 \cdot T(n/16) + n/4)) + n && \mid \text{Nochmal einsetzen} \\
&= 9 \cdot (3 \cdot T(n/64) + n/16)) + 3 \cdot n/4 + n
\end{aligned}
$$

Raten der Lösung durch Iteration

Grundidee

Wiederholtes Einsetzen der Rekursionsgleichung in sich selbst, bis man ein Muster erkennt.

Beispiel

$$
\begin{aligned}
T(n) &= 3 \cdot T(n/4) + n && \mid \text{Einsetzen} \\
&= 3 \cdot (3 \cdot T(n/16) + n/4)) + n && \mid \text{Nochmal einsetzen} \\
&= 9 \cdot (3 \cdot T(n/64) + n/16)) + 3 \cdot n/4 + n && \mid \text{Vereinfachen} \\
&= 27 \cdot T(n/64) + \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot n + \left(\frac{3}{4}\right)^1 \cdot n + \left(\frac{3}{4}\right)^0 \cdot n
\end{aligned}
$$

Raten der Lösung durch Iteration

Grundidee

Wiederholtes Einsetzen der Rekursionsgleichung in sich selbst, bis man ein Muster erkennt.

Beispiel

$$\begin{aligned}
T(n) &= 3 \cdot T(n/4) + n & &\mid \text{Einsetzen} \\
&= 3 \cdot (3 \cdot T(n/16) + n/4)) + n & &\mid \text{Nochmal einsetzen} \\
&= 9 \cdot (3 \cdot T(n/64) + n/16)) + 3 \cdot n/4 + n & &\mid \text{Vereinfachen} \\
&= 27 \cdot T(n/64) + \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot n + \left(\frac{3}{4}\right)^1 \cdot n + \left(\frac{3}{4}\right)^0 \cdot n
\end{aligned}$$

Wir nehmen $T(1) = c$ an und erhalten: $T(n) = \sum_{i=0}^{\log_4(n)-1} \left(\frac{3}{4}\right)^i \cdot n + c \cdot n^{\log_4(3)}$

Raten der Lösung durch Iteration

Grundidee

Wiederholtes Einsetzen der Rekursionsgleichung in sich selbst, bis man ein Muster erkennt.

Beispiel

$$\begin{aligned}
T(n) &= 3 \cdot T(n/4) + n & &\mid \text{Einsetzen} \\
&= 3 \cdot (3 \cdot T(n/16) + n/4)) + n & &\mid \text{Nochmal einsetzen} \\
&= 9 \cdot (3 \cdot T(n/64) + n/16)) + 3 \cdot n/4 + n & &\mid \text{Vereinfachen} \\
&= 27 \cdot T(n/64) + \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot n + \left(\frac{3}{4}\right)^1 \cdot n + \left(\frac{3}{4}\right)^0 \cdot n
\end{aligned}$$

Wir nehmen $T(1) = c$ an und erhalten: $T(n) = \sum_{i=0}^{\log_4(n)-1} \left(\frac{3}{4}\right)^i \cdot n + c \cdot n^{\log_4(3)}$

Diese Aussage kann mit Hilfe der Substitutionsmethode gezeigt werden.

Raten der Lösung durch Rekursionsbäume

Grundidee

Stelle das Ineinander-Einsetzen als Baum dar, indem man Buch über das aktuelle Rekursionsargument und die nicht-rekursiven Kosten führt.

Raten der Lösung durch Rekursionsbäume

Grundidee

Stelle das Ineinander-Einsetzen als Baum dar, indem man Buch über das aktuelle Rekursionsargument und die nicht-rekursiven Kosten führt.

Rekursionsbaum

1. Jeder Knoten stellt die Kosten eines Teilproblems dar.

Raten der Lösung durch Rekursionsbäume

Grundidee

Stelle das Ineinander-Einsetzen als Baum dar, indem man Buch über das aktuelle Rekursionsargument und die nicht-rekursiven Kosten führt.

Rekursionsbaum

1. Jeder Knoten stellt die Kosten eines Teilproblems dar.
   - Die Wurzel stellt die zu analysierenden Kosten $T(n)$ dar.

Raten der Lösung durch Rekursionsbäume

Grundidee

Stelle das Ineinander-Einsetzen als Baum dar, indem man Buch über das aktuelle Rekursionsargument und die nicht-rekursiven Kosten führt.

Rekursionsbaum

1. Jeder Knoten stellt die Kosten eines Teilproblems dar.
   - Die Wurzel stellt die zu analysierenden Kosten $T(n)$ dar.
   - Die Blätter stellen die Kosten der Basisfälle dar, z. B. $T(0)$ oder $T(1)$.

Raten der Lösung durch Rekursionsbäume

Grundidee

Stelle das Ineinander-Einsetzen als Baum dar, indem man Buch über das aktuelle Rekursionsargument und die nicht-rekursiven Kosten führt.

Rekursionsbaum

1. Jeder Knoten stellt die Kosten eines Teilproblems dar.
   - Die Wurzel stellt die zu analysierenden Kosten $T(n)$ dar.
   - Die Blätter stellen die Kosten der Basisfälle dar, z. B. $T(0)$ oder $T(1)$.
2. Wir summieren die Kosten innerhalb jeder Ebene des Baumes.

Raten der Lösung durch Rekursionsbäume

Grundidee

Stelle das Ineinander-Einsetzen als Baum dar, indem man Buch über das aktuelle Rekursionsargument und die nicht-rekursiven Kosten führt.

Rekursionsbaum

1. Jeder Knoten stellt die Kosten eines Teilproblems dar.
   - Die Wurzel stellt die zu analysierenden Kosten $T(n)$ dar.
   - Die Blätter stellen die Kosten der Basisfälle dar, z. B. $T(0)$ oder $T(1)$.
2. Wir summieren die Kosten innerhalb jeder Ebene des Baumes.
3. Die Gesamtkosten $:=$ summieren über die Kosten aller Ebenen.

Raten der Lösung durch Rekursionsbäume

Grundidee

Stelle das Ineinander-Einsetzen als Baum dar, indem man Buch über das aktuelle Rekursionsargument und die nicht-rekursiven Kosten führt.

Rekursionsbaum

1. Jeder Knoten stellt die Kosten eines Teilproblems dar.
   - Die Wurzel stellt die zu analysierenden Kosten $T(n)$ dar.
   - Die Blätter stellen die Kosten der Basisfälle dar, z. B. $T(0)$ oder $T(1)$.
2. Wir summieren die Kosten innerhalb jeder Ebene des Baumes.
3. Die Gesamtkosten := summieren über die Kosten aller Ebenen.

Wichtiger Hinweis

Ein Rekursionsbaum ist sehr nützlich, um eine Lösung zu raten, die dann mit Hilfe der Substitutionsmethode überprüft werden kann.

Raten der Lösung durch Rekursionsbäume

Grundidee

Stelle das Ineinander-Einsetzen als Baum dar, indem man Buch über das aktuelle Rekursionsargument und die nicht-rekursiven Kosten führt.

Rekursionsbaum

1. Jeder Knoten stellt die Kosten eines Teilproblems dar.
   - Die Wurzel stellt die zu analysierenden Kosten $T(n)$ dar.
   - Die Blätter stellen die Kosten der Basisfälle dar, z. B. $T(0)$ oder $T(1)$.
2. Wir summieren die Kosten innerhalb jeder Ebene des Baumes.
3. Die Gesamtkosten := summieren über die Kosten aller Ebenen.

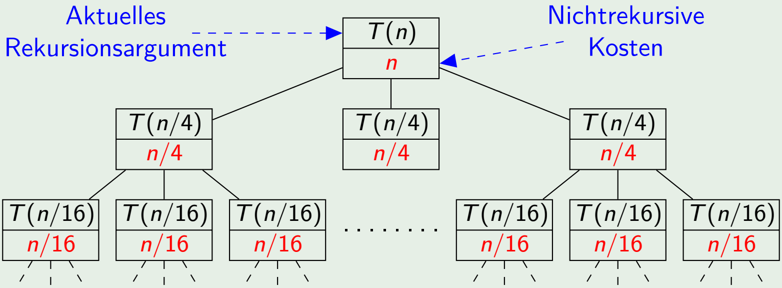
Wichtiger Hinweis

Ein Rekursionsbaum ist sehr nützlich, um eine Lösung zu raten, die dann mit Hilfe der Substitutionsmethode überprüft werden kann.
Der Baum selber reicht jedoch meistens nicht als Beweis.

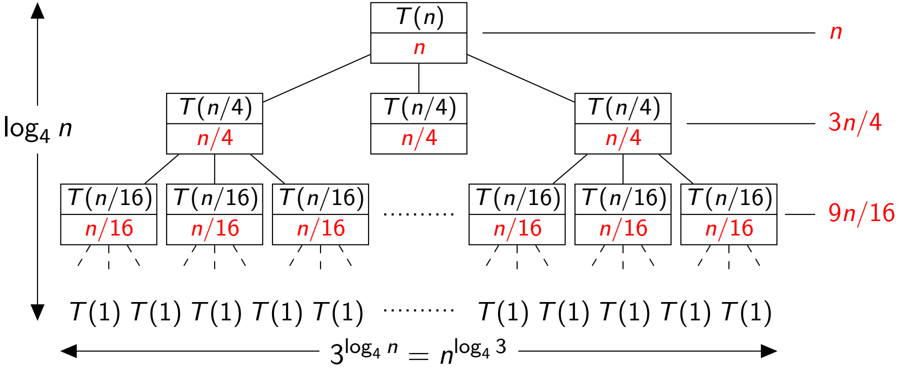
Rekursionsbaum: Beispiel

Beispiel

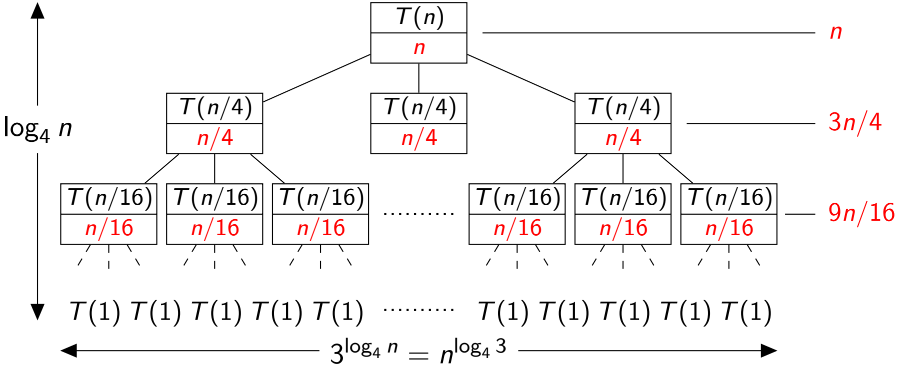
Der Rekursionsbaum von $T(n) = 3 \cdot T(n/4) + n$ sieht etwa so aus:



Rekursionsbaum: Beispiel



Rekursionsbaum: Beispiel



$$T(n) = \underbrace{\sum_{i=0}^{\log_4(n)-1}}_{\substack{\text{Summe über} \\ \text{alle Ebenen}}} \underbrace{\left(\frac{3}{4}\right)^i \cdot n}_{\substack{\text{Kosten pro} \\ \text{Ebene}}} + \underbrace{c \cdot n^{\log_4(3)}}_{\substack{\text{Gesamtkosten} \\ \text{für die Blätter} \\ \text{mit } T(1) = c}}$$

Rekursionsbaum: Beispiel

Eine obere Schranke für die Komplexität erhält man nun folgendermaßen:

Rekursionsbaum: Beispiel

Eine obere Schranke für die Komplexität erhält man nun folgendermaßen:

$$T(n) = \sum_{i=0}^{\log_4(n)-1} \left(\frac{3}{4}\right)^i \cdot n + c \cdot n^{\log_4(3)}$$

Rekursionsbaum: Beispiel

Eine obere Schranke für die Komplexität erhält man nun folgendermaßen:

$$T(n) = \sum_{i=0}^{\log_4(n)-1} \left(\frac{3}{4}\right)^i \cdot n + c \cdot n^{\log_4(3)} \quad | \text{ Vernachlässigen kleinerer Terme}$$

$$< \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^i \cdot n + c \cdot n^{\log_4(3)}$$

Rekursionsbaum: Beispiel

Eine obere Schranke für die Komplexität erhält man nun folgendermaßen:

$$T(n) = \sum_{i=0}^{\log_4(n)-1} \left(\frac{3}{4}\right)^i \cdot n + c \cdot n^{\log_4(3)}$$ | Vernachlässigen kleinerer Terme

$$< \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^i \cdot n + c \cdot n^{\log_4(3)}$$ | Geometrische Reihe

$$< \frac{1}{1-(3/4)} \cdot n + c \cdot n^{\log_4(3)}$$

für $|a| < 1$ gilt

$$\sum_{i=0}^{\infty} d \cdot a^i = \frac{d}{1-a}$$

Rekursionsbaum: Beispiel

Eine obere Schranke für die Komplexität erhält man nun folgendermaßen:

$$
\begin{aligned}
T(n) &= \sum_{i=0}^{\log_4(n)-1} \left(\frac{3}{4}\right)^i \cdot n + c \cdot n^{\log_4(3)} && \mid \text{Vernachlässigen kleinerer Terme} \\
&< \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^i \cdot n + c \cdot n^{\log_4(3)} && \mid \text{Geometrische Reihe} \\
&< \frac{1}{1-(3/4)} \cdot n + c \cdot n^{\log_4(3)} && \mid \text{Umformen} \\
&< 4 \cdot n + c \cdot n^{\log_4(3)}
\end{aligned}
$$

Rekursionsbaum: Beispiel

Eine obere Schranke für die Komplexität erhält man nun folgendermaßen:

$$T(n) = \sum_{i=0}^{\log_4(n)-1} \left(\frac{3}{4}\right)^i \cdot n + c \cdot n^{\log_4(3)}$$ | Vernachlässigen kleinerer Terme

$$< \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^i \cdot n + c \cdot n^{\log_4(3)}$$ | Geometrische Reihe

$$< \frac{1}{1-(3/4)} \cdot n + c \cdot n^{\log_4(3)}$$ | Umformen

$$< 4 \cdot n + c \cdot n^{\log_4(3)}$$ | Asymptotische Ordnung bestimmen setze ein, dass $\log_4(3) < 1$

$T(n) \in O(n)$.

Korrektheit

Wir können die Substitutionsmethode benutzen, um die Vermutung zu bestätigen, dass:

$T(n) \in O(n)$ eine obere Schranke von $T(n) = 3 \cdot T(n/4) + n$ ist.

Korrektheit

Wir können die Substitutionsmethode benutzen, um die Vermutung zu bestätigen, dass:

$T(n) \in O(n)$ eine obere Schranke von $T(n) = 3 \cdot T(n/4) + n$ ist.

$$T(n) = 3 \cdot T(n/4) + n$$

Korrektheit

Wir können die Substitutionsmethode benutzen, um die Vermutung zu bestätigen, dass:

$T(n) \in O(n)$ eine obere Schranke von $T(n) = 3 \cdot T(n/4) + n$ ist.

$$\begin{aligned} T(n) &= 3 \cdot T(n/4) + n && \mid \text{Induktionshypothese} \\ &\leqslant 3d \cdot n/4 + n \end{aligned}$$

Korrektheit

Wir können die Substitutionsmethode benutzen, um die Vermutung zu bestätigen, dass:

$T(n) \in O(n)$ eine obere Schranke von $T(n) = 3 \cdot T(n/4) + n$ ist.

$$
\begin{aligned}
T(n) &= 3 \cdot T(n/4) + n && \mid \text{Induktionshypothese} \\
&\leqslant 3d{\cdot}n/4 + n \\
&= \frac{3}{4}d{\cdot}n + n
\end{aligned}
$$

Korrektheit

Wir können die Substitutionsmethode benutzen, um die Vermutung zu bestätigen, dass:

$T(n) \in O(n)$ eine obere Schranke von $T(n) = 3 \cdot T(n/4) + n$ ist.

$$\begin{aligned} T(n) &= 3 \cdot T(n/4) + n && \mid \text{Induktionshypothese} \\ &\leqslant 3d{\cdot}n/4 + n \\ &= \frac{3}{4}d{\cdot}n + n \\ &= \left(\frac{3}{4}d + 1\right){\cdot}n \end{aligned}$$

Korrektheit

Wir können die Substitutionsmethode benutzen, um die Vermutung zu bestätigen, dass:

$T(n) \in O(n)$ eine obere Schranke von $T(n) = 3 \cdot T(n/4) + n$ ist.

$$
\begin{aligned}
T(n) &= 3 \cdot T(n/4) + n && \mid \text{ Induktionshypothese} \\
&\leqslant 3d{\cdot}n/4 + n \\
&= \frac{3}{4} d{\cdot}n + n \\
&= \left(\frac{3}{4} d + 1\right) {\cdot} n && \mid \text{ mit } d \geqslant 4 \text{ folgt sofort:} \\
&\leqslant d{\cdot}n
\end{aligned}
$$

Korrektheit

Wir können die Substitutionsmethode benutzen, um die Vermutung zu bestätigen, dass:

$T(n) \in O(n)$ eine obere Schranke von $T(n) = 3 \cdot T(n/4) + n$ ist.

$$
\begin{aligned}
T(n) &= 3 \cdot T(n/4) + n && \mid \text{Induktionshypothese} \\
&\leqslant 3d \cdot n/4 + n \\
&= \frac{3}{4} d \cdot n + n \\
&= \left(\frac{3}{4} d + 1\right) \cdot n && \mid \text{mit } d \geqslant 4 \text{ folgt sofort:} \\
&\leqslant d \cdot n
\end{aligned}
$$

Und wir stellen fest, dass es ein n_0 gibt, sodass $T(n_0) \leqslant d \cdot n_0$ ist.

Nächste Vorlesung

Nächste Vorlesung

Montag 7. Mai, 08:30 (Hörsaal H01). Bis dann!

Nächste Frontalübung

Freitag 4. Mai, 13:15 (Hörsaal H01) statt am 1. Mai.