

Datenstrukturen und Algorithmen

Vorlesung 14+15: Elementare Graphenalgorithmen (K22,K24.2)

Joost-Pieter Katoen

Lehrstuhl für Informatik 2
Software Modeling and Verification Group

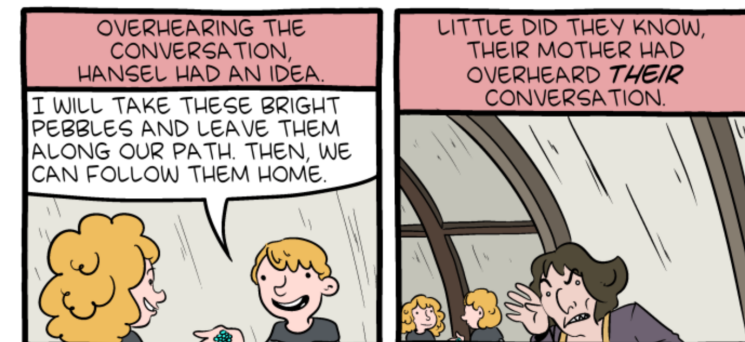
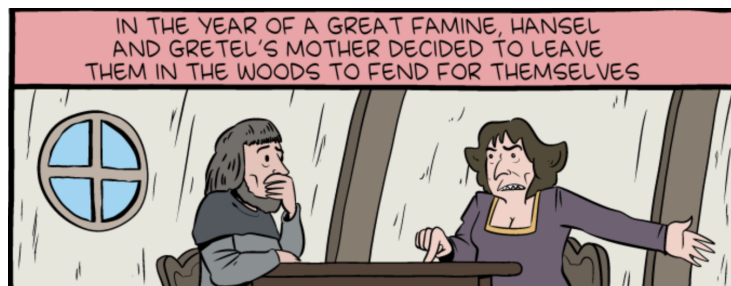
<https://moves.rwth-aachen.de/teaching/ss-18/dsa1/>

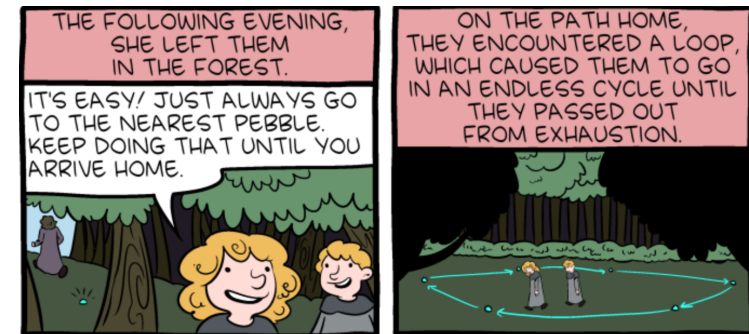
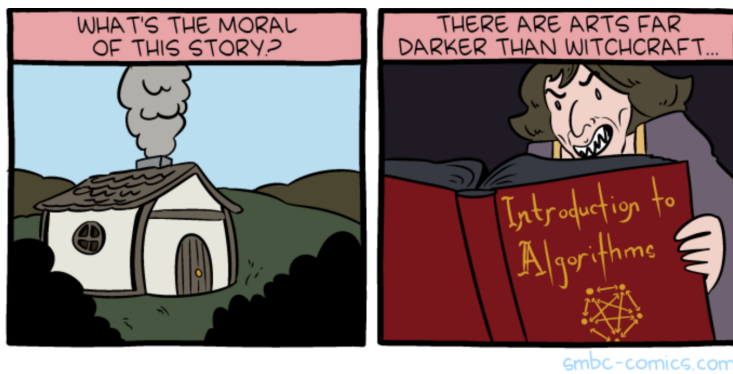
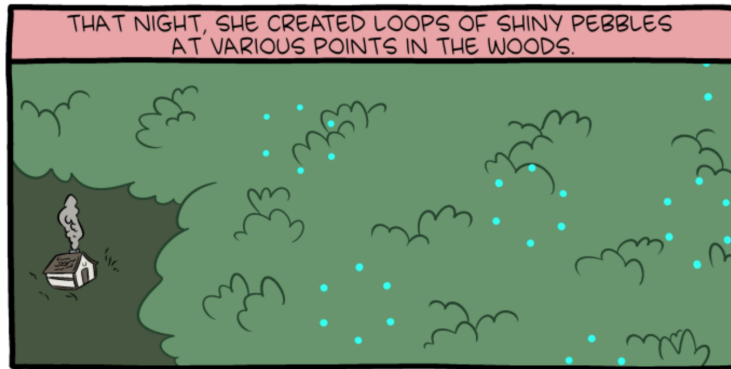
15.+18. Juni 2018



Übersicht

- 1 Graphen
 - Terminologie
 - Repräsentation von Graphen
- 2 Graphendurchlauf
 - Breitensuche
 - Tiefensuche
- 3 Anwendungen der Tiefensuche
 - Erreichbarkeitsanalyse
 - CCs in ungerichteten Graphen
 - SCCs in gerichteten Graphen
 - Topologische Sortierung in gerichteten azyklischen Graphen
 - Kritische-Pfad-Analyse in gewichteten gerichteten azyklischen Graphen





Übersicht

- 1 Graphen
 - Terminologie
 - Repräsentation von Graphen
- 2 Graphendurchlauf
 - Breitensuche
 - Tiefensuche
- 3 Anwendungen der Tiefensuche
 - Erreichbarkeitsanalyse
 - CCs in ungerichteten Graphen
 - SCCs in gerichteten Graphen
 - Topologische Sortierung in gerichteten azyklischen Graphen
 - Kritische-Pfad-Analyse in gewichteten gerichteten azyklischen Graphen

Die Bedeutung von Graphen

Graphen werden in vielen (Informatik-)Anwendungen verwendet:

Beispiele

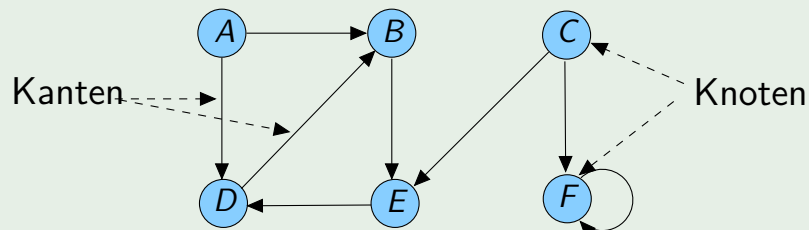
- ▶ (Computer-)Netzwerke
- ▶ Webseiten und ihre Vernetzung mittels Links
- ▶ Darstellung von topologischen Informationen (Karten, ...)
- ▶ Darstellung von elektronischen Schaltungen
- ▶ Vorranggraphen (precedence graph), Ablaufpläne, ...
- ▶ Semantische Netze (z. B. Entity-Relationship-Diagramme)

Wir werden uns auf fundamentale Graphalgorithmen konzentrieren.

Gerichteter Graph

Beispiel

- ▶ $V = \{A, \dots, F\}$
- ▶ $E = \{(A, B), (A, D), (B, E), (C, E), (C, F), (D, B), (E, D), (F, F)\}$



A und B sind adjazent, wie auch z.B. C und E, und F und F.

Gerichteter Graph

Gerichteter Graph

Ein **gerichteter Graph** (auch: **digraph**) G ist ein Paar (V, E) mit

- ▶ einer Menge V von **Knoten** (**vertices**) und
- ▶ einer Menge $E \subseteq \{(u, v) \mid u, v \in V\}$ von **Kanten** (**edges**).

Ungerichteter Graph

Ein **ungerichteter Graph** G ist ein Paar (V, E) mit

- ▶ einer Menge V von **Knoten** (**vertices**) und
- ▶ einer Menge $E \subseteq \{\{u, v\} \mid u, v \in V, u \neq v\}$ von **Kanten** (**edges**).

Auch für ungerichtete Kanten verwenden wir die Notation (u, v) .

Adjazent

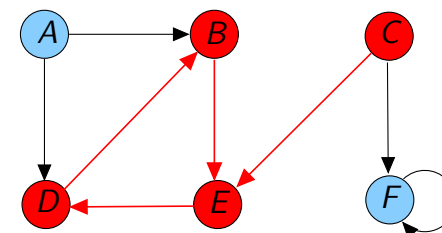
Knoten $v \in V$ ist **adjazent** zu $u \in V$, wenn $(u, v) \in E$.

Terminologie bei Graphen

Teilgraph

Ein **Teilgraph** (subgraph) eines Graphen $G = (V, E)$ ist ein Graph $G' = (V', E')$ mit:

- ▶ $V' \subseteq V$ und $E' \subseteq E$.
- ▶ Außerdem ist $E' \subseteq V' \times V'$ wegen der Grapheigenschaft von G' .
- ▶ Ist $V' \subset V$ und $E' \subset E$, so heißt G' **echter** (proper) Teilgraph.



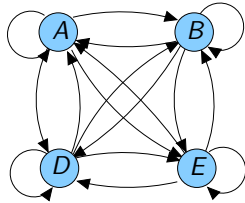
Beispiel: Rote Knoten und Kanten bilden einen (echten) Teilgraphen

Terminologie bei Graphen

Symmetrischer Graph

Der Graph G heißt **symmetrisch**, wenn aus $(u, v) \in E$ folgt $(v, u) \in E$.

- ▶ Zu jedem ungerichteten Graphen gibt es einen korrespondierenden symmetrischen gerichteten Graphen.



Beispiel: symmetrischer gerichteter Graph

Vollständiger Graph

Ein ungerichteter Graph ist **vollständig**, wenn *jedes* Paar von Knoten durch eine Kante verbunden ist.

Pfade

Pfad (Weg)

Ein **Pfad** vom Knoten $u \in V$ zum $w \in V$ in $G = (V, E)$ ist eine Folge $v_0 v_1 \dots v_{k-1} v_k$ von Knoten $v_i \in V$ mit $(v_i, v_{i+1}) \in E$, $v_0 = u$, $v_k = w$.

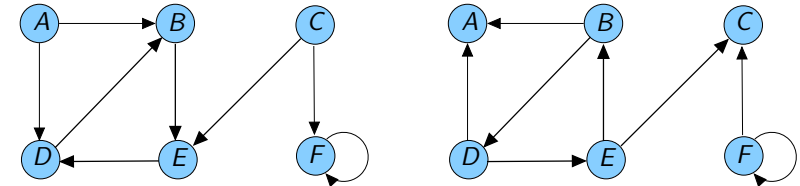
- ▶ Die Länge k eines Pfades ist die Anzahl der durchlaufenen Kanten.
- ▶ Einen Pfad der Länge 0 nennen wir **leer**.
- ▶ Ein Pfad mit $v_i \neq v_j$ für alle $i \neq j$ heißt **einfach**.
- ▶ Knoten w ist **erreichbar** von u , wenn es einen Pfad von u nach w gibt.

Terminologie bei Graphen

Transponieren

Transponiert man $G = (V, E)$, so erhält man $G^T = (V, E')$ mit $(v, u) \in E'$ gdw. $(u, v) \in E$.

- ▶ In G^T ist die Richtung der Kanten von G umgedreht.



Beispiel: Ein Graph G und sein transponierter Graph G^T

Zyklen

Zyklen in gerichteten Graphen

Ein **Zyklus** in einem *gerichteten* Graph ist ein nicht-leerer Pfad bei dem der Startknoten auch der Endknoten ist.

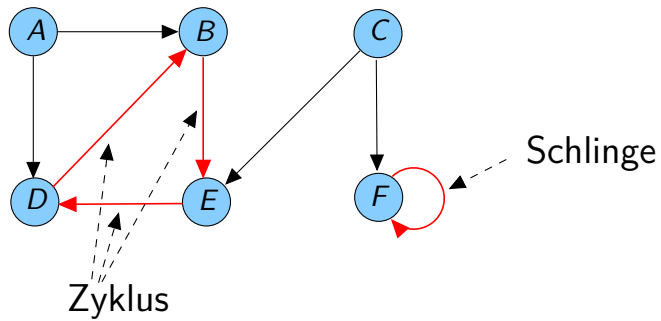
- ▶ Ein Zyklus vv der Länge 1 heißt **Schlinge** (self-loop).
- ▶ Ein Zyklus $v_0 \dots v_k$ ist **einfach** wenn v_1, \dots, v_k paarweise verschieden sind.
- ▶ Ein gerichteter Graph ist **azyklisch**, wenn er keine Zyklen hat.

Zyklen in ungerichteten Graphen

Ein **Zyklus** in einem *ungerichteten* Graph ist ein Pfad $v_0 \dots v_k$ mit $k \geq 3$, $v_0 = v_k$ und v_1, \dots, v_k paarweise verschieden.

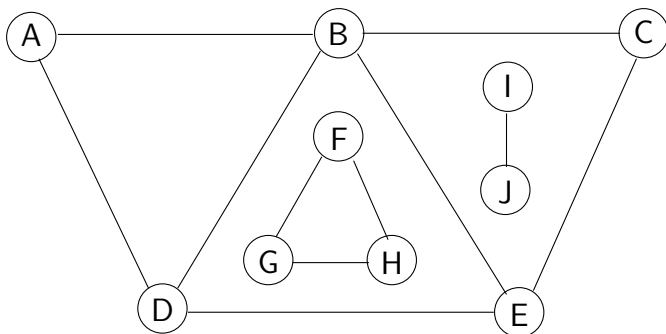
- ▶ Ein ungerichteter Graph ist **azyklisch**, wenn er keine Zyklen hat.

Pfade und Zyklen



$ABEDB$ und CF sind Pfade, aber keine einfache Pfade.
 EDB und CF sind einfache Pfade.

Ungerichtete, zusammenhängende Graphen



Ein ungerichteter Graph; Was sind die Zusammenhangskomponenten?

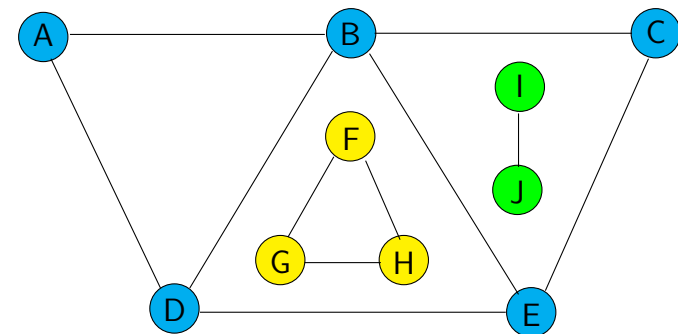
Zusammenhangskomponenten in ungerichteten Graphen

Zusammenhangskomponenten in ungerichteten Graphen

Sei G ein **ungerichteter** Graph.

- ▶ G heißt **zusammenhängend** (**connected**), wenn jeder Knoten von jedem anderen Knoten aus erreichbar ist.
- ▶ Eine **Zusammenhangskomponente** (**connected component, CC**) von G ist ein maximaler (d.h. nicht erweiterbarer) zusammenhängender Teilgraph von G .

Ungerichtete, zusammenhängende Graphen



Die Zusammenhangskomponenten.

Zusammenhangskomponenten in gerichteten Graphen

Zusammenhangskomponenten in gerichteten Graphen

Sei G ein **gerichteter** Graph.

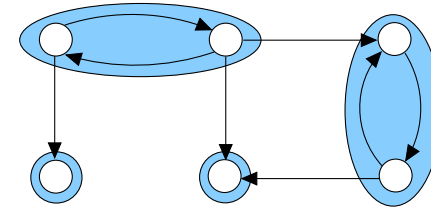
- ▶ G heißt **stark zusammenhängend** (*strongly connected*), wenn jeder Knoten von jedem anderen Knoten aus erreichbar ist.
 - ▶ G heißt **schwach zusammenhängend** (*weakly connected*), wenn der zugehörige ungerichtete Graph (wenn man alle Kanten ungerichtet macht) zusammenhängend ist.
 - ▶ Eine **starke Zusammenhangskomponente** (*strongly connected component, SCC*) von G ist ein maximaler stark zusammenhängender Teilgraph von G .
- ▶ Die Zerlegung eines Graphen in seine Zusammenhangskomponente ist **eindeutig**.

Zusammenhang

Bemerkungen

- ▶ Ein Baum (zusammenhängender azyklischer Graph) mit n Knoten hat $n - 1$ Kanten.
- ▶ Ein ungerichteter Graph mit n Knoten und weniger als $n - 1$ Kanten kann nicht zusammenhängend sein.
- ▶ Ein ungerichteter Graph mit n Knoten und mindestens n Kanten muss einen Zyklus enthalten.

Starke Zusammenhangskomponenten



Ein gerichteter Graph und seine starke Zusammenhangskomponente (SCCs).

Übersicht

- 1 Graphen
 - Terminologie
 - Repräsentation von Graphen
- 2 Graphendurchlauf
 - Breitensuche
 - Tiefensuche
- 3 Anwendungen der Tiefensuche
 - Erreichbarkeitsanalyse
 - CCs in ungerichteten Graphen
 - SCCs in gerichteten Graphen
 - Topologische Sortierung in gerichteten azyklischen Graphen
 - Kritische-Pfad-Analyse in gewichteten gerichteten azyklischen Graphen

Repräsentation von Graphen: Adjazenzmatrix

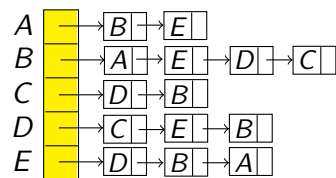
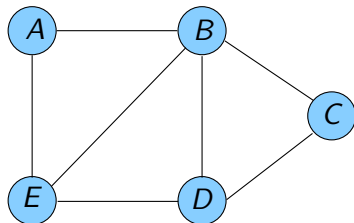
Sei $G = (V, E)$ mit $|V| = n$, $|E| = m$ und $V = \{v_1, \dots, v_n\}$.

Adjazenzmatrix

Die **Adjazenzmatrix**-Darstellung eines Graphen ist durch eine $n \times n$ boolesche Matrix A gegeben, wobei $A(i, j) = 1$, wenn $(v_i, v_j) \in E$, sonst 0.

- ▶ Wenn G ungerichtet ist, ergibt sich symmetrisches A (d. h. $A = A^T$). Dann muss nur die Hälfte gespeichert werden.
- ⇒ Platzbedarf: $\Theta(n^2)$.

Darstellung eines ungerichteten Graphen



Adjazenzliste

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Adjazenzmatrix

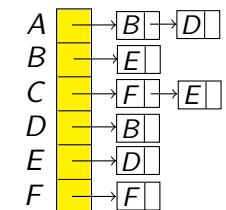
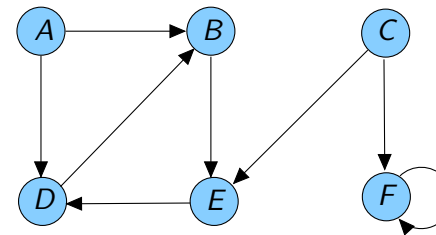
Repräsentation von Graphen: Adjazenzliste

Adjazenzliste

Bei der Darstellung als **Array von Adjazenzlisten** gibt es ein durch die Nummer des Knoten indiziertes Array, das jeweils verkettete Listen (Adjazenzlisten) enthält.

- ▶ Der i -te Arrayeintrag enthält alle Kanten von G , die von v_i „ausgehen“.
- ▶ Ist G ungerichtet, dann werden Kanten doppelt gespeichert.
- ▶ Kanten, die nicht in G vorkommen, benötigen keinen Speicherplatz.
- ⇒ Platzbedarf: $\Theta(n + m)$.

Darstellung eines gerichteten Graphen



Adjazenzliste

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Adjazenzmatrix

Übersicht

- 1 Graphen
 - Terminologie
 - Repräsentation von Graphen
- 2 Graphendurchlauf
 - Breitensuche
 - Tiefensuche
- 3 Anwendungen der Tiefensuche
 - Erreichbarkeitsanalyse
 - CCs in ungerichteten Graphen
 - SCCs in gerichteten Graphen
 - Topologische Sortierung in gerichteten azyklischen Graphen
 - Kritische-Pfad-Analyse in gewichteten gerichteten azyklischen Graphen

Übersicht

- 1 Graphen
 - Terminologie
 - Repräsentation von Graphen
- 2 Graphendurchlauf
 - Breitensuche
 - Tiefensuche
- 3 Anwendungen der Tiefensuche
 - Erreichbarkeitsanalyse
 - CCs in ungerichteten Graphen
 - SCCs in gerichteten Graphen
 - Topologische Sortierung in gerichteten azyklischen Graphen
 - Kritische-Pfad-Analyse in gewichteten gerichteten azyklischen Graphen

Graphendurchlauf

Viele Algorithmen, die wir später kennenlernen werden, untersuchen jeden Knoten (und jede Kante).

Es gibt verschiedene **Graphendurchlaufstrategien** (traversal strategies), die jeden Knoten (oder jede Kante) besuchen:

- ▶ **Tiefensuche**
- ▶ **Breitensuche**

- ▶ Dies sind Verallgemeinerungen von Strategien zur Baumtraversierung.
- ▶ Da Graphen zyklisch sein können, müssen wir uns aber alle bereits gefundenen Knoten merken.
- ▶ Im Folgenden nehmen wir die **Adjazenzlisten**-Darstellung an.
- ▶ Dann: Zeitaufwand von Tiefen- und Breitensuche in $\mathcal{O}(|V| + |E|)$.

Breitensuche

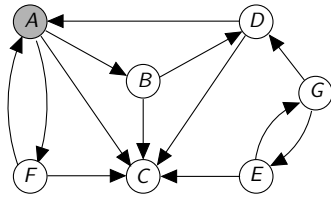
Breitensuche (Breadth-First Search, BFS)

Am Anfang seien alle Knoten als **„nicht-gefunden“** (WHITE) markiert. Die zugrundeliegende Strategie ist:

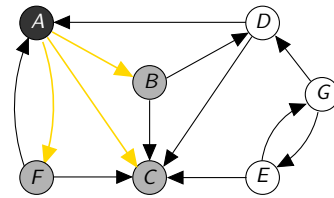
- ▶ Markiere den aktuellen Knoten v als **„gefunden“** (GRAY).
- ▶ Suche „gleichzeitig“ aus allen **„gefundenen“** Knoten weiter:
 - ▶ Markiere alle ihrer noch **„nicht-gefundenen“** Nachfolger als **„gefunden“** und
 - ▶ markiere die Knoten selbst als **„abgeschlossen“** (BLACK).

- ▶ Man erhält die Menge aller Knoten, die vom Startknoten aus **erreichbar** sind.

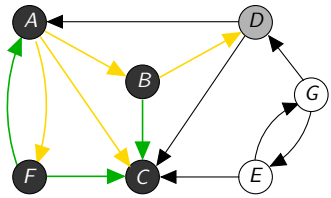
Breitensuche: Beispiel



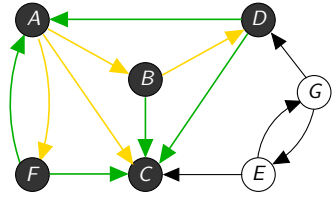
Beginn der Breitensuche



Erforsche alle folgenden nicht-gefundenen Knoten



Erforsche alle folgenden nicht-gefundenen Knoten



Fertig!

Eigenschaften der Breitensuche

- ▶ Knoten werden in der Reihenfolge mit **zunehmendem kürzesten Abstand (Kantendistanz)** vom Startknoten aus besucht.
 - ▶ Nachdem alle Knoten mit Abstand d verarbeitet wurden, werden die mit $d + 1$ angegangen.
 - ▶ Die Suche terminiert, wenn in Abstand d keine neuen Knoten auftreten.
- ▶ Die Tiefe des Knotens v im Breitensuchbaum ist seine **kürzeste Kantendistanz** zum Startknoten.
- ▶ Die zu verarbeitenden Knoten werden als **FIFO-Queue** (first-in first-out) organisiert.

Komplexität der Breitensuche

Die Zeitkomplexität ist in $\mathcal{O}(|V| + |E|)$, der Platzbedarf in $\Theta(|V|)$.

Breitensuche: Implementierung

```

1 void BFS(List adj[n], int start, int &color[n]) {
2   Queue wait; // zu verarbeitende Knoten
3   color[start] = GRAY; // Knoten start ist noch zu verarbeiten
4   wait.enqueue(start);
5   while (!wait.isEmpty()) { // es gibt noch unverarbeitete Knoten
6     int v = wait.dequeue(); // nächster unverarbeiteter Knoten
7     foreach (w in adj[v]) {
8       if (color[w] == WHITE) { // neuer ("ungefundener") Knoten
9         color[w] = GRAY; // w ist noch zu verarbeiten
10        wait.enqueue(w);
11      }
12    }
13    color[v] = BLACK; // v ist abgeschlossen
14  }
15 }

17 void completeBFS(List adj[n], int n) {
18   int color[n] = WHITE; // noch kein Knoten ist gefunden worden
19   for (int i = 0; i < n; i++)
20     if (color[i] == WHITE) BFS(adj, n, i, color);
21 }

```

Übersicht

- 1 Graphen
 - Terminologie
 - Repräsentation von Graphen
- 2 Graphendurchlauf
 - Breitensuche
 - Tiefensuche
- 3 Anwendungen der Tiefensuche
 - Erreichbarkeitsanalyse
 - CCs in ungerichteten Graphen
 - SCCs in gerichteten Graphen
 - Topologische Sortierung in gerichteten azyklischen Graphen
 - Kritische-Pfad-Analyse in gewichteten gerichteten azyklischen Graphen

Tiefensuche

Tiefensuche (Depth-First Search, DFS)

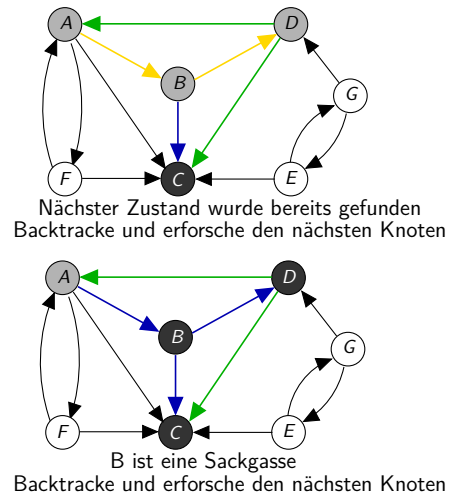
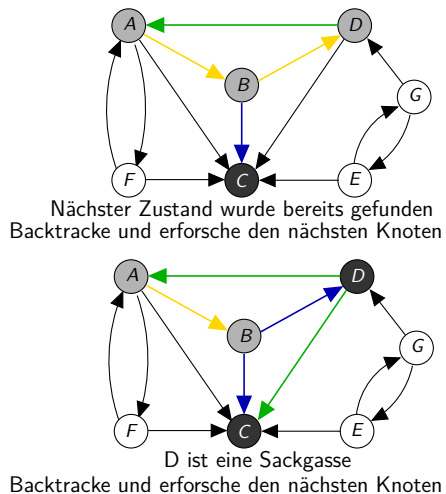
Am Anfang seien alle Knoten als „nicht-gefunden“ (WHITE) markiert.

Die zugrundeliegende Strategie ist:

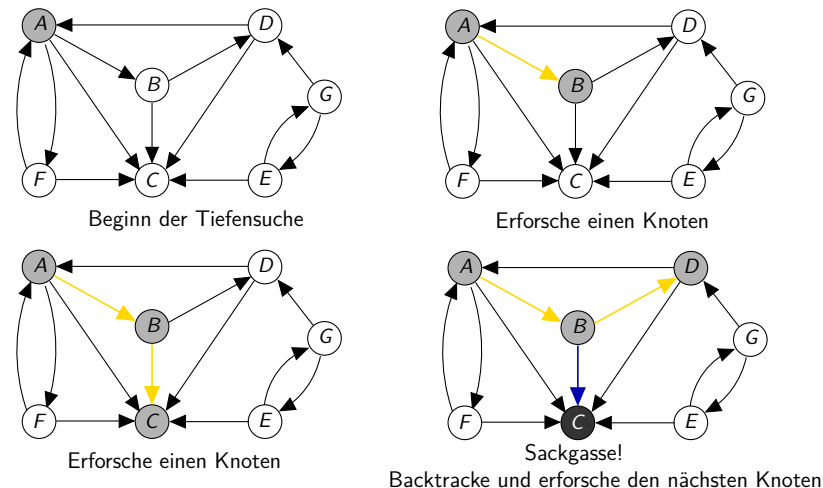
- ▶ Markiere den aktuellen Knoten v als „gefunden“ (GRAY).
- ▶ Solange es noch eine Kante (v, u) mit „nicht-gefundenem“ Nachfolger u gibt:
 - ▶ Suche rekursiv von u aus, d. h.:
 - ▶ Erforsche Kante (u, w) , besuche w , forsche von dort aus, bis es nicht mehr weiter geht.
 - ▶ Markiere u als „abgeschlossen“ (BLACK).
 - ▶ Backtracke von u nach v .
- ▶ Markiere v als „abgeschlossen“ (BLACK).

- ▶ Man erhält wieder die Menge aller Knoten, die vom Startknoten aus **erreichbar** sind.

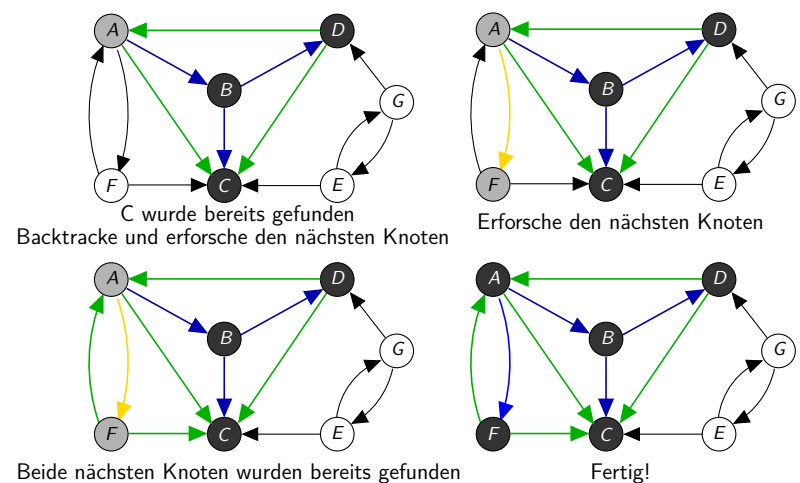
Tiefensuche: Beispiel



Tiefensuche: Beispiel



Tiefensuche: Beispiel



Tiefensuche: Implementierung

```

1 void DFS(List adj[n], int start, int &color[n]) {
2   color[start] = GRAY; // start ist noch zu verarbeiten
3   foreach (w in adj[start]) {
4     if (color[w] == WHITE) { // neuer ("ungefundener") Knoten
5       DFS(adj, w, color);
6     }
7   }
8   color[start] = BLACK; // start ist abgeschlossen
9 }

11 void completeDFS(List adj[n], int n, int start) {
12   int color[n] = WHITE; // noch kein Knoten ist gefunden worden
13   for (int i = 0; i < n; i++)
14     if (color[i] == WHITE) DFS(adj, i, color);
15 }

```

Nächste Vorlesung

Nächste Vorlesung

Montag 18. Juni, 08:30 (Hörsaal H01). Bis dann!

Eigenschaften der Tiefensuche

- ▶ Erforsche einen Pfad **so weit wie möglich** bevor backtracking.
 - ▶ Die zu verarbeitenden Knoten werden in LIFO-Reihenfolge (last-in first-out) geprüft.
 - ▶ Es gibt **zwei** „Verarbeitungsmöglichkeiten“ für einen Knoten:
 1. Wenn der Knoten entdeckt wird.
 2. Wenn der Knoten als „abgearbeitet“ markiert wird (und alle seine Nachfolger entdeckt werden).
- ⇒ Diese letztgenannte Möglichkeit macht Tiefensuche beliebt.

Komplexität der Tiefensuche

Die Zeitkomplexität ist in $\mathcal{O}(|V| + |E|)$, der Platzbedarf in $\Theta(|V|)$.

Übersicht

- 1 Graphen
 - Terminologie
 - Repräsentation von Graphen
- 2 Graphendurchlauf
 - Breitensuche
 - Tiefensuche
- 3 Anwendungen der Tiefensuche
 - Erreichbarkeitsanalyse
 - CCs in ungerichteten Graphen
 - SCCs in gerichteten Graphen
 - Topologische Sortierung in gerichteten azyklischen Graphen
 - Kritische-Pfad-Analyse in gewichteten gerichteten azyklischen Graphen

Irrgärten

“Das eben geschieht den Menschen, die in einem Irrgarten hastig werden:
Eben die Eile führt immer tiefer in die Irre.”

[Lucius Annaeus Seneca (4 n. Chr. – 65 n. Chr.)]



Erreichbarkeitsanalyse: DFS Implementierung

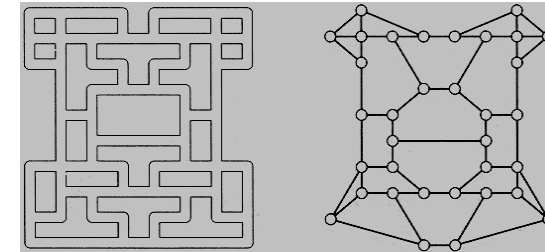
```

1 bool DFS(List adj[n], int start, int &color[n],
2         int target, List path) {
3     if (start == target){
4         path.addAtFront(start); return true;
5     }
6     color[start] = GRAY;
7     foreach (w in adj[start]) {
8         if (color[w] == WHITE) {
9             if (DFS(adj, w, color, target, path)) {
10                path.addAtFront(start); return true;
11            }
12        }
13    }
14    color[start] = BLACK;
15    return false;
16 }
17 bool reach(List adj[n], int n, int start, int target,
18           List &path) { // path ist leer
19     int color[n] = WHITE;
20     return DFS(adj, start, color, target, path);
21 }

```

Geschichte

- ▶ **Tiefensuche** wurde bereits vor Jahrhunderten formal beschrieben als ein Verfahren zum Durchqueren von **Labyrinth**.
- ▶ Labyrinth als Graph:
 - ▶ **Knoten**: Stellen, an denen mehr als ein Weg gewählt werden kann
 - ▶ **Kanten**: Wege zwischen Knoten
 - ▶ **Eingang**: als spezieller Knoten start
 - ▶ **Ziel**: als spezieller Knoten target
- ▶ **Erreichbarkeitsproblem**:
Ist target erreichbar von start, und wenn ja, wie sieht ein Pfad von start nach target aus?



Übersicht

- 1 Graphen
 - Terminologie
 - Repräsentation von Graphen
- 2 Graphendurchlauf
 - Breitensuche
 - Tiefensuche
- 3 Anwendungen der Tiefensuche
 - Erreichbarkeitsanalyse
 - CCs in ungerichteten Graphen
 - SCCs in gerichteten Graphen
 - Topologische Sortierung in gerichteten azyklischen Graphen
 - Kritische-Pfad-Analyse in gewichteten gerichteten azyklischen Graphen

CCs in ungerichteten Graphen

Zusammenhangskomponenten in ungerichteten Graphen

Sei G ein **ungerichteter** Graph.

- ▶ G heißt **zusammenhängend** (**connected**), wenn jeder Knoten von jedem anderen Knoten aus erreichbar ist.
- ▶ Eine **Zusammenhangskomponente** (**connected component, CC**) von G ist ein maximaler (d.h. nicht erweiterbarer) zusammenhängender Teilgraph von G .

CCs in ungerichteten Graphen

```

1 void DFS(List adj[n], int start, int &color[n],
2         int leader, int &cc[n]) {
3     color[start] = GRAY;
4     foreach (next in adj[start])
5         if (color[next] == WHITE)
6             DFS(adj, next, color, leader, cc);
7     color[start] = BLACK;
8     cc[start] = leader; // speichere das CC von start
9 }

11 void connComponents(List adj[n], int n, int &cc[n]) {
12     int color[n]= WHITE;
13     for (int v = 0; v < n; v++)
14         if (color[v] == WHITE) // weitere Komponente
15             DFS(adj, v, color, v, cc);
16 } // Ausgabe in cc: cc[v] = Komponente von Knoten v

```

CCs in ungerichteten Graphen

Problem:

Finde die Zusammenhangskomponenten (CCs) eines **ungerichteten** Graphen G .

Loesung:

Finden des CCs eines Knotens v :
Verwende Tiefen- (oder Breiten)suche, um alle aus v erreichbaren Knoten zu bestimmen.

Übersicht

- 1 Graphen
 - Terminologie
 - Repräsentation von Graphen
- 2 Graphendurchlauf
 - Breitensuche
 - Tiefensuche
- 3 Anwendungen der Tiefensuche
 - Erreichbarkeitsanalyse
 - CCs in ungerichteten Graphen
 - SCCs in gerichteten Graphen
 - Topologische Sortierung in gerichteten azyklischen Graphen
 - Kritische-Pfad-Analyse in gewichteten gerichteten azyklischen Graphen

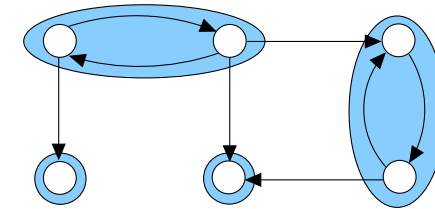
SCCs in gerichteten Graphen

Zusammenhangskomponenten

Sei G ein gerichteter Graph.

- ▶ G heißt **stark zusammenhängend** (**strongly connected**), wenn jeder Knoten von jedem anderen aus erreichbar ist.
- ▶ Eine **starke Zusammenhangskomponente** (**strongly connected component, SCC**) von G ist ein maximaler (d.h., nicht erweiterbarer) stark zusammenhängender Teilgraph von G .

Starke Zusammenhangskomponenten (SCCs)



Ein gerichteter Graph und seine SCCs.

Kondensationsgraph

Die starken Zusammenhangskomponenten von G induzieren den **Kondensationsgraph**.

Kondensationsgraph

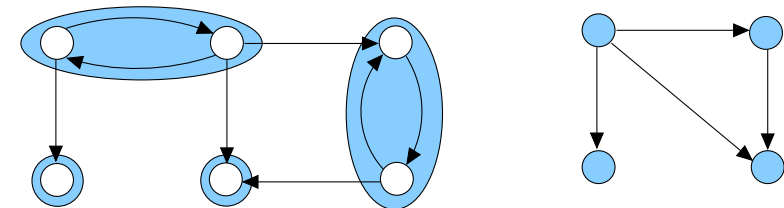
Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph mit k SCCs $S_i = (V_i, E_i)$ für $0 < i \leq k$.

Der **Kondensationsgraph** $G_{\downarrow} = (V', E')$ ist definiert als:

- ▶ $V' = \{V_1, \dots, V_k\}$.
- ▶ $(V_i, V_j) \in E'$ gdw. $i \neq j$ und es gibt $(v, w) \in E$ mit $v \in V_i$ und $w \in V_j$.

Der Kondensationsgraph G_{\downarrow} ist **azyklisch**.

Kondensationsgraph: Beispiel



Ein gerichteter Graph G und seine Kondensation G_{\downarrow} .

SCCs und Transponierung

Transponieren

Der **transponierte** Graph von $G = (V, E)$ ist $G^T = (V, E')$ mit $(v, w) \in E'$ gdw. $(w, v) \in E$.

In G^T ist die Richtung der Kanten von G gerade umgedreht.

Lemma: Beziehung zwischen G und G^T

- Die SCCs von G und G^T sind **die selben**.
- Die Kondensation und die Transposition **kommutieren**, d. h.:

$$(G \downarrow)^T = (G^T) \downarrow$$

```

1 void DFS1(List adj[n], int start, int &color[n], Stack &S) {
2   color[start] = GRAY;
3   foreach (w in adj[start])
4     if (color[w] == WHITE) DFS1(adj, w, color, S);
5   color[start] = BLACK; S.push(start);
6 }
7 void DFS2(List adj[n], int start, int &color[n], int leader,
8           int &scc[n]) {
9   color[start] = GRAY;
10  foreach (w in adj[start])
11    if (color[w] == WHITE) DFS2(adj, w, color, leader, scc);
12  color[start] = BLACK; scc[start] = leader;
13 }
14 void kosaraju-sharir(List adj[n], int n) {
15   int color[n] = WHITE; Stack S; int scc[n];
16   for (int i = 0; i < n; i++) // Phase 1
17     if (color[i] == WHITE) DFS1(adj, i, color, S);
18   List adj_T = adj^T; // Transponiere
19   for (int i = 0; i < n; i++) color[i] = WHITE; // Phase 2
20   while (!S.empty()) { // Phase 3
21     int v = S.pop();
22     if (color[v] == WHITE) DFS2(adj_T, v, color, v, scc);
23   }
24 }

```

Algorithmus zum Finden von SCCs

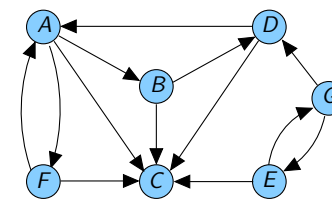
Der **Kosaraju-Sharir Algorithmus** findet SCCs in **zwei** Phasen:

- Führe ein DFS auf G durch, wobei alle Knoten beim Abschließen (d. h. wenn der Knoten BLACK gefärbt wird) auf einem Stack S gespeichert werden.
- Färbe alle Knoten wieder WHITE.
- Wiederhole solange der Stack S noch weiße Knoten enthält:
 - Wähle den obersten noch weißen (Leiter-)Knoten v vom S .
 - Führe ein DFS mit Startknoten v auf dem transponierten Graphen G^T aus und speichere für jeden besuchten Knoten den **Leiterknoten** v als Repräsentanten seines SCCs.

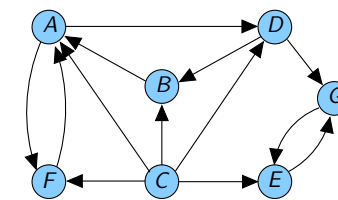
Leiter einer SCC

Ein Knoten v heißt **Leiter** (leader), wenn er als **letzter** Knoten aus seinem SCC bei einer DFS BLACK gefärbt wird.

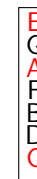
Kosaraju-Sharir Algorithmus: Beispiel



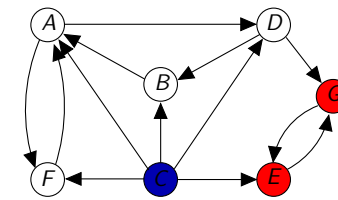
Ursprünglicher Digraph



Transponierter Graph



Stack am Ende der Phase 1



In Phase 2 gefundene starke Komponenten

Korrektheit

Übersicht

- 1 Graphen
 - Terminologie
 - Repräsentation von Graphen
- 2 Graphendurchlauf
 - Breitensuche
 - Tiefensuche
- 3 Anwendungen der Tiefensuche
 - Erreichbarkeitsanalyse
 - CCs in ungerichteten Graphen
 - SCCs in gerichteten Graphen
 - Topologische Sortierung in gerichteten azyklischen Graphen
 - Kritische-Pfad-Analyse in gewichteten gerichteten azyklischen Graphen

Komplexität

Zeitkomplexität

Die Worst-Case Zeitkomplexität vom Kosaraju-Sharir Algorithmus zum Finden von SCCs in einem gerichteten Graphen ist in $\Theta(|V| + |E|)$. Seine Speicherkomplexität ist in $\Theta(|V|)$.

Beweis

- ▶ Die DFS über G und G^T benötigen jeweils $\Theta(|V| + |E|)$.
- ▶ Der transponierte Graph G^T kann in $\Theta(|V| + |E|)$ gebildet werden.
- ▶ Der Stack benötigt $\Theta(|V|)$ Speicher.

Gerichtete azyklische Graphen

Gerichtete azyklische Graphen

Gerichtete azyklische Graphen (directed acyclic graph, DAG) sind wichtig:

- ▶ Viele Probleme lassen sich naturgemäß mit Hilfe von DAGs formulieren.
 - ▶ Scheduling: Vorranggraphen beschreiben, welche Aufgaben erledigt sein müssen, bevor ein nachfolgender Schritt beginnen kann.
 - ▶ Ein Zyklus in solch einem Vorranggraphen wäre ein Deadlock.
- ▶ Viele Probleme haben auf DAGs eine niedrigere Komplexität als auf (möglichst zyklische) gerichtete Graphen.
- ▶ Ein DAG entspricht einer **partiellen Ordnung** $<$ auf den Knoten:
 - ▶ Eine Kante (v, w) besagt: $v > w$.
 - ⇒ Da eine partielle Ordnung anti-symmetrisch ist, kann sie keinen Zyklus enthalten.

- ▶ Wir betrachten: **Topologische Sortierung** und **Kritische-Pfad-Analyse**.

Topologische Ordnung

Topologische Ordnung

Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph mit n Knoten. Eine **topologische Ordnung** von G ist eine Zuordnung $topo : V \rightarrow \{1, \dots, n\}$, so dass:

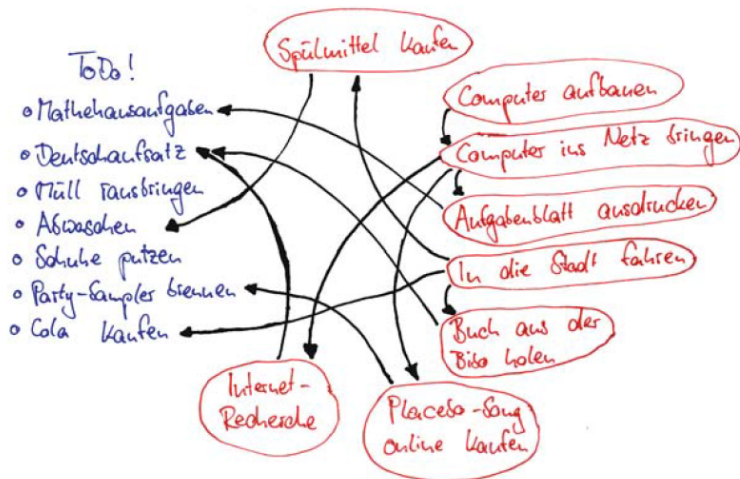
für jede Kante $(v, w) \in E$ gilt: $topo(v) > topo(w)$.

$topo(v)$ heißt der **topologische Zahl** von v .

Lemma

1. Für einen Digraph G mit einem Zyklus existiert **keine** topologische Ordnung.
2. Jeder DAG G dagegen hat mindestens eine topologische Ordnung.

Topologische Sortierung: Beispiel 1



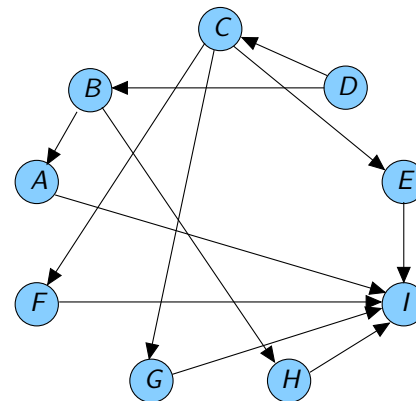
Quelle: <http://www-i1.informatik.rwth-aachen.de/~algorithmus/algo8.php>

Topologische Sortierung: Beispiel 1

- ToDo!
- Mathehausaufgaben
 - Deutschaufsatz
 - Müll rausbringen
 - Abwaschen
 - Schuhe putzen
 - Party-Sampler brennen
 - Cola kaufen

Quelle: <http://www-i1.informatik.rwth-aachen.de/~algorithmus/algo8.php>

Topologische Sortierung: Beispiel 2



Abhängigkeitsgraph

Nr	Aufgabe	Hängt ab von
A	choose clothes	I
B	dress	A, H
C	eat breakfast	E, F, G
D	leave	B, C
E	make coffee	I
F	make toast	I
G	pour juice	I
H	shower	I
I	wake up	-

► Gibt es einen **Schedule** für dieses Problem? D. h. kann man eine Reihenfolge finden, um alle Aufgaben ausführen zu können?

Topologische Sortierung: Implementierung

```

1 void DFS(List adj[n], int start, int &color[n],
2           int &topoNum, int &topo[n]) {
3   color[start] = GRAY;
4   foreach (next in adj[start]) {
5     // if (color[next] == GRAY) throw "Graph ist zyklisch";
6     if (color[next] == WHITE) {
7       DFS(adj, next, color, topoNum, topo);
8     }
9   }
10  topo[start] = ++topoNum;
11  color[start] = BLACK;
12 }

14 // Ausgabe der topologischen Zahl von Knoten v in topo[v]
15 void topoSort(List adj[n], int n, int &topo[n]) {
16   int color[n] = WHITE, topoNum = 0;
17   for (int v = 0; v < n; v++)
18     if (color[v] == WHITE)
19       DFS(adj, v, color, topoNum, topo);
20 }

```

Korrektheit und Komplexität

Theorem

Der Algorithmus terminiert, und wenn er terminiert enthält das Array topo eine topologische Ordnung von Digraph G .

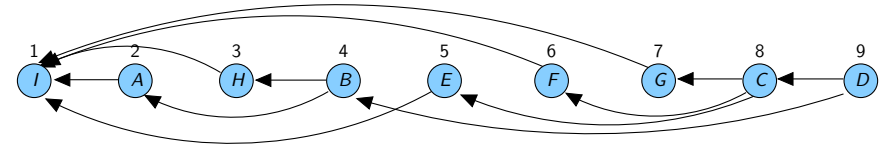
Beweis:

- Die DFS besucht jeden Knoten, daher sind die Zahlen in dem Array topo alle verschieden im Bereich 1 bis $|V|$.
- Sei $(v, w) \in E$.
 - w ist kein Vorgänger von v im DFS-Baum, sonst wäre G zyklisch.
 - Daher ist w BLACK, wenn topo[v] ein Wert zugewiesen wird.
 - Also wurde topo[w] schon vorher ein Wert zugewiesen.
 - Da topoNum immer größer wird, folgt topo[v] > topo[w].

Zeitkomplexität

Eine topologische Ordnung kann in $\mathcal{O}(|V| + |E|)$ bestimmt werden.

Topologische Sortierung: Ergebnis Beispiel 2



I	A	H	B	E	F	G	C	D
wake up	choose clothes	shower	dress	make coffee	make toast	pour juice	eat breakf	leave

Abhängigkeitsgraph, der topologischen Ordnung entsprechend gezeichnet.

Übersicht

- Graphen
 - Terminologie
 - Repräsentation von Graphen
- Graphendurchlauf
 - Breitensuche
 - Tiefensuche
- Anwendungen der Tiefensuche
 - Erreichbarkeitsanalyse
 - CCs in ungerichteten Graphen
 - SCCs in gerichteten Graphen
 - Topologische Sortierung in gerichteten azyklischen Graphen
 - Kritische-Pfad-Analyse in gewichteten gerichteten azyklischen Graphen

Gewichtete Graphen

Knotengewichteter Graph

Ein **knotengewichteter** Graph G ist ein Tripel (V, E, W) , wobei:

- ▶ (V, E) ein – gerichteter oder ungerichteter – Graph ist, und
- ▶ $W : V \rightarrow \mathbb{R}$ die **Gewichtsfunktion**. $W(v)$ ist das Gewicht des Knotens v .

Kantengewichteter Graph

Ein **(kanten-)gewichteter** Graph G ist ein Tripel (V, E, W) , wobei:

- ▶ (V, E) ein – gerichteter oder ungerichteter – Graph ist, und
- ▶ $W : E \rightarrow \mathbb{R}$ Gewichtsfunktion. $W(e)$ ist das Gewicht der Kante e .

Ein **knotengewichteter** Graph (V, E, W) lässt sich in einen **kantengewichteten** Graphen (V, E, W') überführen, indem *alle* von einem Knoten v ausgehenden Kanten $e = (v, \cdot) \in E$ das Gewicht $W'(e) = W(v)$ erhalten.

Das Kritische-Pfad-Problem: Einführung

Das Gewicht eines Pfades ist die Summe der Kantengewichten der besuchten Kanten, oder die Summe der Knotengewichte der besuchten Knoten.

Kritischer-Pfad-Problem

Finde den **längsten** Pfad (bezogen auf das Gesamtgewicht) in einem (kanten- oder knoten-)gewichteten **DAG**.

- ▶ Wir betrachten hier *nur* **knotengewichtete** DAGs.

Beispiel (Anwendung)

Wie lange benötigt man für die Ausführung der bereits vorgestellten Aufgaben mindestens, wenn für jede Aufgabe eine Dauer gegeben ist und unabhängige Aufgaben gleichzeitig erledigt werden können?

Gewichtete Graphen: Darstellung

Gewichtete Graphen werden ebenso als Adjazenzlisten oder Adjazenzmatrix dargestellt:

- ▶ Bei **knotengewichteten** Graphen wird die Zusatzinformation zu den Knoten üblicherweise in einem weiteren Array gespeichert – vgl. `int color[n]`; bei BFS oder DFS.
- ▶ **Kantengewichte** können bei der Adjazenzmatrixdarstellung direkt in der Matrix gespeichert werden. Ein besonderer Wert, etwa ∞ besagt, dass keine Kante existiert.

Das Kritische-Pfad-Problem: Anwendung

Früheste Startzeit- und Endzeitpunkt

Finde den **frühestmöglichen Beendigungszeitpunkt** (earliest finish time, eft) für eine Menge voneinander abhängiger Aufgaben.

- ▶ Jede Aufgabe hat eine (nicht-negative) **Dauer**.
- ▶ Der **früheste Startzeitpunkt** (earliest start time, est) für Aufgabe v ($est(v)$) ist 0 wenn v keine Abhängigkeiten hat; andernfalls:
- ▶ $est(v)$ ist das Maximum der frühesten Endzeitpunkte seiner Abhängigkeiten.

Der **früheste Endzeitpunkt** (earliest finish time) für Aufgabe v ($eft(v)$) ist gleich $est(v)$ plus der Dauer von v .

Das Kritische-Pfad-Problem: Anwendung

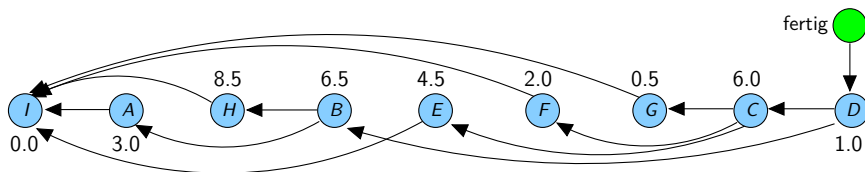
Kritische Pfad

Der **kritische Pfad** ist eine Folge von Aufgaben v_0, \dots, v_k , so dass

- ▶ v_0 keine Abhängigkeiten hat.
- ▶ v_i abhängig von v_{i-1} ist, wobei $est(v_i) = eft(v_{i-1})$.
- ▶ $eft(v_k)$ das Maximum über alle Aufgaben ergibt.

Dann gibt es eine **kritische** Abhängigkeit zwischen v_{i-1} und v_i , d.h. eine Verzögerung in v_{i-1} führt zu einer Verzögerung in v_i .

Kritische-Pfad-Analyse: Beispiel



I	A	H	B	E	F	G	C	D
wake up	choose clothes	shower	dress	make coffee	make toast	pour juice	eat breakf	leave
0.0	3.0	8.5	6.5	4.5	2.0	0.5	6.0	1.0

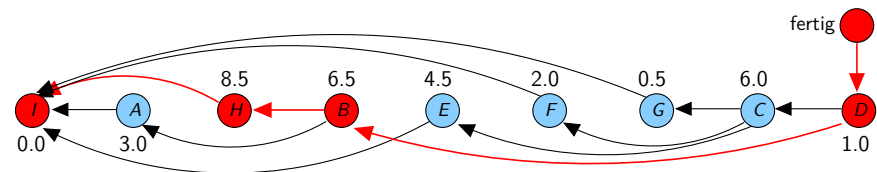
Dauer

Kritische-Pfad-Analyse: Implementierung

```

1 // Knotengewichte in duration.
2 // Ausgabe: eft, kritischer Pfad kodiert in critDep
3 void DFS(List adj[n], int start, int &color[n],
4         int duration[n], int &critDep[n], int &eft[n]) {
5     color[start] = GRAY; critDep[start] = -1; int est = 0;
6     foreach (next in adj[start]) {
7         if (color[next] == WHITE)
8             DFS(adj, next, color, duration, critDep, eft);
9         if (eft[next] >= est) {
10            est = eft[next]; critDep[start] = next;
11        }
12    }
13    eft[start] = est + duration[start];
14    color[start] = BLACK;
15 }
16 void critPath(List adj[n], int n,
17              int duration[n], int &critDep[n], int &eft[n]){
18     int color[n] = WHITE;
19     for (int i = 0; i < n; i++)
20         if (color[i] == WHITE)
21             DFS(adj, i, color, duration, critDep, eft);
22 }
    
```

Kritische-Pfad-Analyse: Beispiel



I	A	H	B	E	F	G	C	D
wake up	choose clothes	shower	dress	make coffee	make toast	pour juice	eat breakf	leave
0.0	3.0	8.5	6.5	4.5	2.0	0.5	6.0	1.0

Dauer

▶ $eft = 1 + 6.5 + 8.5 + 0 = 16$.

Nächste Vorlesung

Nächste Vorlesung

Freitag 22. Juni, 13:15 (Hörsaal H01). Bis dann!