

Datenstrukturen und Algorithmen

Vorlesung 13: Hashing II

Joost-Pieter Katoen

Lehrstuhl für Informatik 2
Software Modeling and Verification Group

<https://moves.rwth-aachen.de/teaching/ss-18/dsa1/>

11. Juni 2018



Übersicht

1 Hashing und Verkettung

2 Offene Adressierung

- Lineares Sondieren
- Quadratisches Sondieren
- Doppeltes Hashing
- Effizienz der offenen Adressierung

Übersicht

1 Hashing und Verkettung

2 Offene Adressierung

- Lineares Sondieren
- Quadratisches Sondieren
- Doppeltes Hashing
- Effizienz der offenen Adressierung

Hashing

Das Ziel von **Hashing** ist:

- ▶ Einen extrem großen Schlüsselraum auf einen vernünftig kleinen Bereich von ganzen Zahlen abzubilden.
- ▶ Dass zwei Schlüssel auf die selbe Zahl abgebildet werden, soll möglichst unwahrscheinlich sein.

Hashfunktion, Hashtabelle, Hashkollision

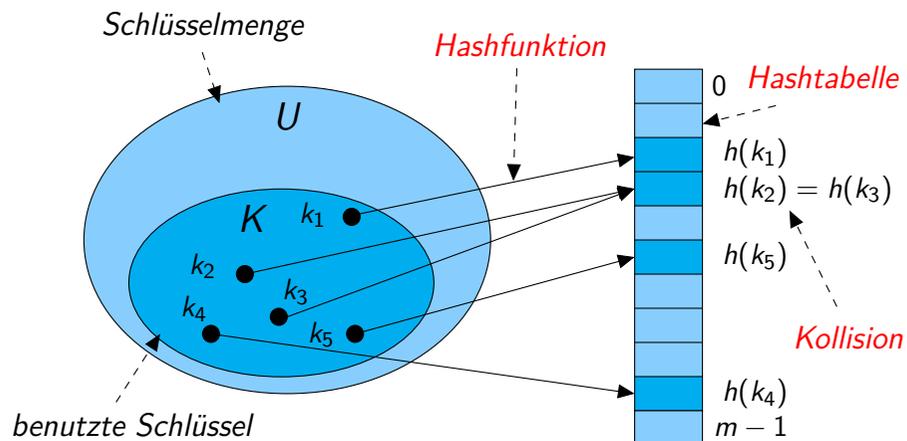
Eine **Hashfunktion** bildet einen Schlüssel auf einen Index der **Hashtabelle** T ab:

$$h : U \longrightarrow \{0, 1, \dots, m-1\} \text{ für Tabellengröße } m \text{ und } |U| = n.$$

Wir sagen, dass $h(k)$ der **Hashwert** des Schlüssels k ist.

Das Auftreten von $h(k) = h(k')$ für $k \neq k'$ nennt man eine **Kollision**.

Hashing



- ▶ Wie behandeln wir dennoch auftretende Kollisionen?
- ▶ Zwei Varianten: Verkettung und Offene Adressierung

Average-Case-Analyse von Verkettung

Erfolgreiche Suche

Die erfolgreiche Suche benötigt im Average-Case $\Theta(1 + \alpha)$.

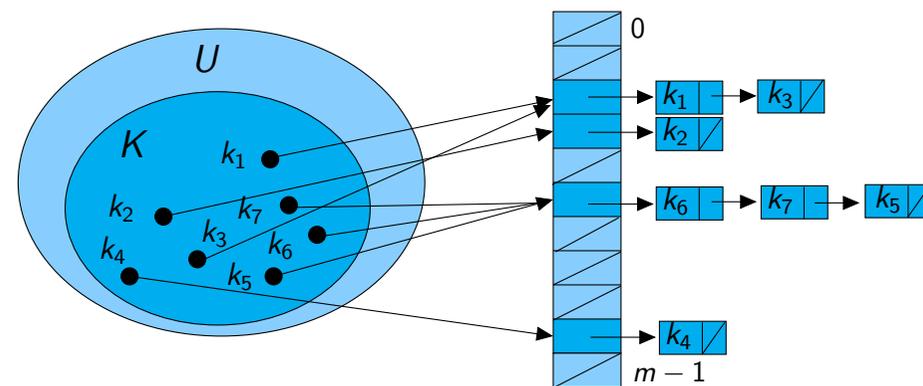
Erfolgreiche Suche

Die erfolgreiche Suche benötigt im Average-Case $\Theta(1 + \alpha)$.

Kollisionsauflösung durch Verkettung (I)

Idee

Alle Schlüssel, die zum gleichen Hash führen, werden in einer verketteten Liste gespeichert. [Luhn 1953]



Übersicht

- 1 Hashing und Verkettung
- 2 Offene Adressierung
 - Lineares Sondieren
 - Quadratisches Sondieren
 - Doppeltes Hashing
 - Effizienz der offenen Adressierung

Kollisionsauflösung durch offene Adressierung

- ▶ Alle Elemente werden direkt in der Hashtabelle gespeichert (im Gegensatz zur Verkettung).
- ⇒ Höchstens m Schlüssel können gespeichert werden, d. h. $\alpha(n, m) = \frac{n}{m} \leq 1$. [Amdahl 1954]
- ▶ Man spart aber den Platz für die Pointer.

Einfügen von Schlüssel k

- ▶ **Sondiere** (to probe) die Positionen der Hashtabelle, bis ein leerer Slot gefunden wurde.
- ▶ Die zu überprüfenden Positionen sind vom einzufügenden Schlüssel k abgeleitet.
- ▶ Die Hashfunktion hängt also vom Schlüssel k und der **Nummer der Sondierung** ab:

$$h : U \times \{0, 1, \dots, m-1\} \longrightarrow \{0, 1, \dots, m-1\}$$

Suche bei offener Adressierung

```

1 int hashSearch(int T[], int key) {
2   for (int i = 0; i < T.length; i++) {
3     int pos = h(key, i); // Berechne i-te Sondierung
4     if (T[pos] == key) { // Schlüssel k gefunden
5       return T[pos];
6     } else if (!T[pos]) { // freier Platz, nicht gefunden
7       break;
8     }
9   }
10  return -1; // "nicht gefunden"
11 }

```

Einfügen bei offener Adressierung

```

1 void hashInsert(int T[], int key) {
2   for (int i = 0; i < T.length; i++) { // Teste ganze Tabelle
3     int pos = h(key, i); // Berechne i-te Sondierung
4     if (!T[pos]) { // freier Platz
5       T[pos] = key;
6       return; // fertig
7     }
8   }
9   throw "Überlauf der Hashtabelle";
10 }

```

Löschen bei offener Adressierung

Problem

Löschen des Schlüssels k aus Slot i durch $T[i] = \text{null}$ ist **ungeeignet**:

- ▶ Wenn beim Einfügen von k der Slot i besetzt war, können wir k nicht mehr abrufen.

Lösung

Markiere $T[i]$ mit dem **speziellen Wert** DELETED (oder: „veraltet“).

- ▶ `hashInsert` muss angepasst werden und solche Slots als leer betrachten.
- ▶ `hashSearch` bleibt unverändert, solche Slots werden einfach übergangen.

- ▶ Die Suchzeiten sind nun nicht mehr allein vom Füllgrad α abhängig.
- ⇒ Wenn Schlüssel gelöscht werden sollen wird häufiger **Verkettung** verwendet.

Wie wählt man die nächste Sondierung?

Wir benötigen eine **Sondierungssequenz** für einen gegebenen Schlüssel k :

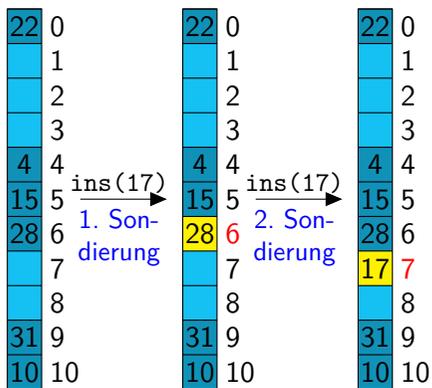
$$\langle h(k, 0), h(k, 1), \dots, h(k, m-1) \rangle$$

- ▶ Wenn es sich dabei um eine Permutation von $\langle 0, \dots, m-1 \rangle$ handelt ist garantiert, dass jeder Slot letztlich geprüft wird.
- ▶ **Gleichverteiltes** Hashing wäre ideal, d. h. jede der $m!$ Permutationen ist als Sondierungssequenz gleich wahrscheinlich.
- ▶ In der Praxis ist das aber zu aufwändig und wird approximiert.

Sondierungsverfahren

- ▶ Wir behandeln **Lineares Sondieren**, **Quadratisches Sondieren** und **Doppeltes Hashing**.
- ▶ Die Qualität ist durch die Anzahl der verschiedenen Sondierungssequenzen, die jeweils erzeugt werden, bestimmt.

Lineares Sondieren: Beispiel



$$h(k) = k \bmod 11$$

$$h(k, i) = (h'(k) + i) \bmod 11$$

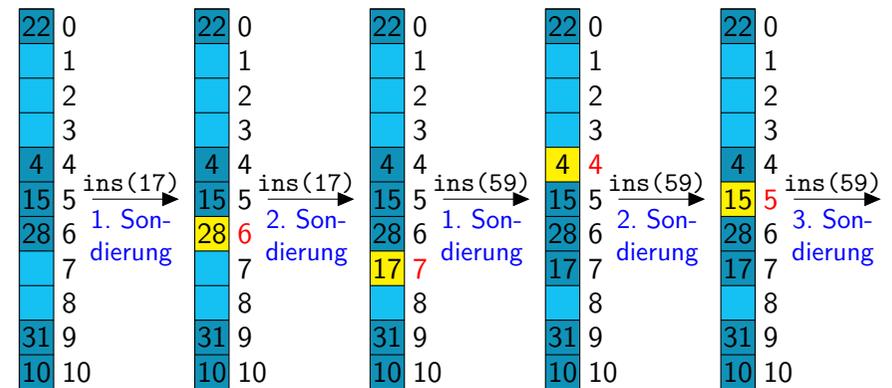
Lineares Sondieren

Hashfunktion beim linearen Sondieren

$$h(k, i) = (h'(k) + i) \bmod m \text{ (für } i < m\text{)}.$$

- ▶ k ist der Schlüssel
- ▶ i ist der Index im Sondierungssequenz
- ▶ h' ist eine übliche Hashfunktion.

Lineares Sondieren: Beispiel



$$h(k) = k \bmod 11$$

$$h(k, i) = (h'(k) + i) \bmod 11$$

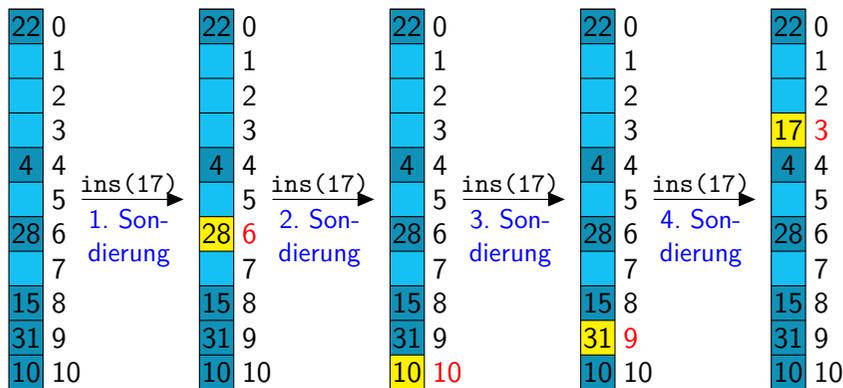
Lineares Sondieren

Hashfunktion beim linearen Sondieren

$$h(k, i) = (h'(k) + i) \bmod m \text{ (für } i < m).$$

- ▶ h' ist eine übliche Hashfunktion.
 - ▶ Die Verschiebung der nachfolgende Sondierungen ist linear von i abhängig.
 - ▶ Die erste Sondierung bestimmt bereits die gesamte Sequenz.
- ⇒ m verschiedene Sequenzen können erzeugt werden.
- ▶ **Clustering**, also lange Folgen von belegten Slots, führt zu Problemen:
 - ▶ $h'(k)$ bleibt konstant, aber der Offset wird jedes Mal um eins größer.
 - ▶ Ein leerer Slot, dem i volle Slots vorausgehen, wird als nächstes mit Wahrscheinlichkeit $\frac{i+1}{m}$ gefüllt.
- ⇒ Lange Folgen tendieren dazu länger zu werden.

Quadratisches Sondieren: Beispiel



$$h'(k) = k \bmod 11$$

$$h(k, i) = (h'(k) + i + 3i^2) \bmod 11$$

Quadratisches Sondieren

Hashfunktion beim quadratischen Sondieren

$$h(k, i) = (h'(k) + c_1 \cdot i + c_2 \cdot i^2) \bmod m \text{ (für } i < m).$$

- ▶ k ist der Schlüssel
- ▶ i ist der Index im Sondierungssequenz
- ▶ h' ist eine übliche Hashfunktion, und
- ▶ $c_1, c_2 \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ geeignete Konstanten.

Quadratisches Sondieren

Hashfunktion beim quadratischen Sondieren

$$h(k, i) = (h'(k) + c_1 \cdot i + c_2 \cdot i^2) \bmod m \text{ (für } i < m).$$

- ▶ h' ist eine übliche Hashfunktion, $c_1, c_2 \neq 0$ Konstanten.

- ▶ Die Verschiebung der nachfolgende Sondierungen ist quadratisch von i abhängig.
 - ▶ Die erste Sondierung bestimmt bereits die gesamte Sequenz.
- ⇒ Auch hier können m verschiedene Sequenzen erzeugt werden (wenn c_1, c_2 geeignet gewählt wurden).
- ▶ Das Clustering von linearem Sondieren wird vermieden.
 - ▶ Jedoch tritt **sekundäres** Clustering immer noch auf:

$$h(k, 0) = h(k', 0) \text{ verursacht } h(k, i) = h(k', i) \text{ für alle } i.$$

Doppeltes Hashing

Hashfunktion beim doppelten Hashing

$$h(k, i) = (h_1(k) + i \cdot h_2(k)) \bmod m \text{ (für } i < m).$$

- ▶ h_1, h_2 sind übliche Hashfunktionen.

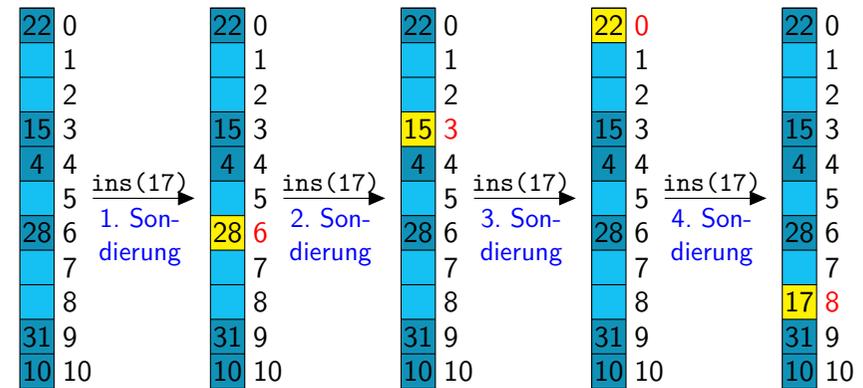
Doppeltes Hashing

Hashfunktion beim doppelten Hashing

$$h(k, i) = (h_1(k) + i \cdot h_2(k)) \bmod m \text{ (für } i < m).$$

- ▶ h_1, h_2 sind übliche Hashfunktionen.
- ▶ Die Verschiebung der nachfolgende Sondierungen ist von $h_2(k)$ abhängig.
- ▶ Die erste Sondierung bestimmt **nicht** die gesamte Sequenz.
- ⇒ Bessere Verteilung der Schlüssel in der Hashtabelle.
- ⇒ Approximiert das gleichverteilte Hashing.
- ▶ Sind h_2 und m relativ prim, wird die gesamte Hashtabelle abgesucht.
 - ▶ Wähle z. B. $m = 2^k$ und h_2 so, dass sie nur ungerade Zahlen erzeugt.
- ▶ Jedes mögliche Paar $h_1(k)$ und $h_2(k)$ erzeugt eine andere Sequenz.
- ⇒ Daher können m^2 verschiedene Permutationen erzeugt werden.

Doppeltes Hashing: Beispiel



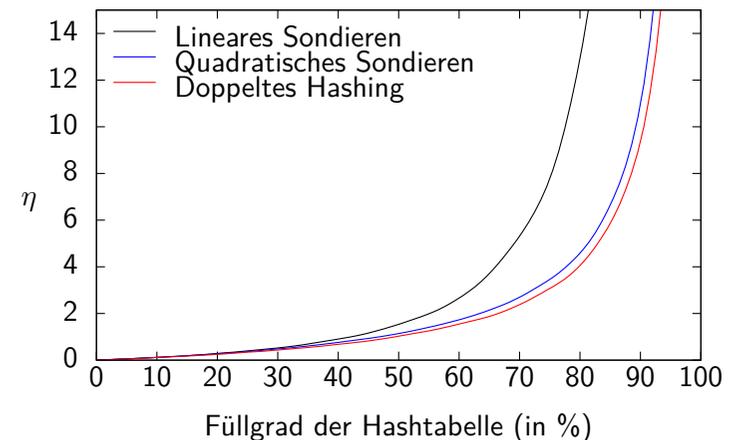
$$h_1(k) = k \bmod 11$$

$$h_2(k) = 1 + k \bmod 10$$

$$h(k, i) = (h_1(k) + i \cdot h_2(k)) \bmod 11$$

Praktische Effizienz von Doppeltem Hashing

- ▶ Hashtabelle mit 538 051 Einträgen (Endfüllgrad 99,95%)
- ▶ Mittlere Anzahl Kollisionen η pro Einfügen in die Hashtabelle:



Effizienz der offenen Adressierung

Unter der Annahme von gleichverteiltem Hashing gilt:

Erfolgreiche Suche

Die erfolgreiche Suche benötigt $O\left(\frac{1}{1-\alpha}\right)$ Zeit im Average-Case.

- ▶ Bei 50% Füllung sind durchschnittlich 2 Sondierungen nötig.
- ▶ Bei 90% Füllung sind durchschnittlich 10 Sondierungen nötig.

Erfolgreiche Suche

Die erfolgreiche Suche benötigt $O\left(\frac{1}{\alpha} \cdot \ln \frac{1}{1-\alpha}\right)$ im Average-Case.

- ▶ Bei 50% Füllung sind durchschnittlich 1,39 Sondierungen nötig.
- ▶ Bei 90% Füllung sind durchschnittlich 2,56 Sondierungen nötig.

Bei der Verkettung hatten wir $\Theta(1 + \alpha)$ in beiden Fällen erhalten.

Analyse der erfolglosen Suche (II)

Erfolgreiche Suche

Eine Suche für k ist **erfolglos** wenn für i alle Slots $h(k, 0), \dots, h(k, i-1)$ belegt sind, jedoch unterschiedlich von k sind, und $h(k, i)$ ist unbelegt.

Sei X die Anzahl der belegten Positionen bis eine freie Position gefunden ist:

$$X = \min \{ i \in \mathbb{N} : h(k, i) \text{ ist unbelegt} \}.$$

Sei $E[X]$ der Erwartungswert von X .

Dann: die Average-Case Komplexität einer erfolglosen Suche ist $1 + E[X]$.

Lemma

$$E[X] \leq \frac{n}{m-n+1}.$$

Beweis: in der Vorlesung. Damit: $1 + E[X] \leq 1 + \frac{n}{m-n+1} \in O\left(\frac{1}{1-\alpha}\right)$.

Analyse der erfolglosen Suche (I)

Annahmen

- ▶ Betrachte eine **zufällig** erzeugte Sondierungssequenz für Schlüssel k .
- ▶ Annahme: jede mögliche Sondierungssequenz hat die **gleiche Wahrscheinlichkeit** $\frac{1}{m!}$, da es $m!$ mögliche Permutationen von den Positionen $0, \dots, m-1$ gibt.
- ▶ Bemerkung: dies ist nicht unrealistisch, da im Idealfall die Sondierungssequenz für k möglichst unabhängig ist von der Sondierungssequenz für k' , $k \neq k'$.
- ▶ Wir nehmen (wie vorher) an, dass die Berechnung von Hashwerten in $O(1)$ liegt.

Analyse der erfolgreichen Suche (I)

- ▶ Sei Schlüssel k_i der i -te eingefügte Schlüssel in der Hashtabelle.
- ▶ Betrachte eine erfolgreiche Suche für Schlüssel k_{i+1} .
- ▶ Sei X_i die Anzahl der Sondierungen beim Einfügen vom Schlüssel k_i .
- ▶ Im Schnitt, braucht eine erfolgreiche Suche für k_i , $E[X_i]$ Zeiteinheiten.
- ▶ Die Average-Case Zeitkomplexität für eine erfolgreiche Suche ist:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} E[X_{i+1}].$$

Lemma

$$\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} E[X_{i+1}] \in O\left(\frac{1}{\alpha} \cdot \ln \frac{1}{1-\alpha}\right).$$

Beweis: in der Vorlesung.

Nächste Vorlesung

Nächste Vorlesung

Freitag 15. Juni, 13:15 (Hörsaal H01). Bis dann!