Datenstrukturen und Algorithmen

Vorlesung 11: Rot-Schwarz-Bäume (K13)

Joost-Pieter Katoen

Lehrstuhl für Informatik 2
Software Modeling and Verification Group

https://moves.rwth-aachen.de/teaching/ss-18/dsal/

1. Juni 2018

Übersicht

1 Einführung

2 Rot-Schwarz-Bäume
- Definition
- Einfügen
- Löschen

Übersicht

1 Einführung

2 Rot-Schwarz-Bäume
- Definition
- Einfügen
- Löschen

Einführung

- Hauptproblem der Suchbäume: Effizienz hängt von der Höhe ab
- Je balanzierter desto “besser” der Suchbaum
- für die Suche: ja; andererseits:
  - dauerndes Rebalanzieren kostet Zeit
  - wie stellt man – effizient – fest ob ein Baum balanciert ist?
  - speichert man Zusatzinformationen darüber ab?

Idee von Rot-Schwarz-Bäumen (Bayer, 1972):

1. zwei Arten von Knoten: Schwarze werden strikt balanciert, rote dienen als Schlupf
2. Anteil des Schlupfes muß beschränkt sein

Also: nicht zu strikte Balanciertheitsanforderungen und wenig zusätzliche Information (1 Bit)

Übersicht

1 Einführung

2 Rot-Schwarz-Bäume
- Definition
- Einfügen
- Löschen

Rot-Schwarz-Bäume (1)

Rot-Schwarz-Eigenschaft

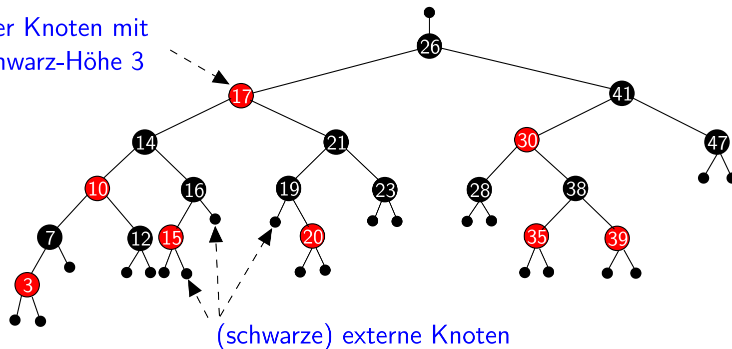
Ein binärer Suchbaum, dessen Knoten jeweils zusätzlich eine Farbe haben, hat die Rot-Schwarz-Eigenschaft, wenn:

1. Jeder Knoten ist entweder rot oder schwarz.
2. Die Wurzel ist schwarz.
3. Ein roter Knoten hat nur schwarze Kinder.
4. `null`-Zeiger (fehlendes Kind, hier enden die Pfade) betrachten wir als externe Knoten mit der Farbe schwarz.
5. Für jeden Knoten enthalten alle Pfade, die an diesem Knoten starten und in einem externen Knoten enden, die gleiche Anzahl schwarzer Knoten.

Solche Bäume heißen dann Rot-Schwarz-Bäume (red-black tree, RBT).

- In den Algorithmen verwenden wir für `null`-Zeiger (externe Knoten) die Notation `null.color` (== `BLACK`).

Rot-Schwarz-Bäume (2)

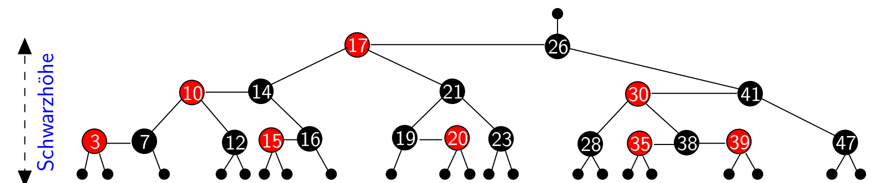


Definition

- Die Schwarz-Höhe $bh(x)$ eines Knotens x ist die Anzahl schwarzer Knoten bis zu einem (externen) Blatt, x ausgenommen.
- Die Schwarzhöhe $bh(t)$ eines RBT t ist die Schwarz-Höhe seiner Wurzel.

Rot-Schwarz-Bäume (3)

Zeichnet man die roten Knoten auf der selben Höhe wie ihren Vater, dann erhält man:



- Die externen Knoten werden in Zeichnungen oft weggelassen.

Definition

Die Schwarzhöhe $bh(t)$ eines RBT t ist die Schwarz-Höhe seiner Wurzel.

Elementare Eigenschaften von Rot-Schwarz-Bäumen

Lemma

Ein Rot-Schwarz-Baum t mit Schwarzhöhe $h = bh(t)$ hat:

- *Mindestens $2^h - 1$ innere Knoten.*
- *Höchstens $4^h - 1$ innere Knoten.*

Beweis: Induktion über h.

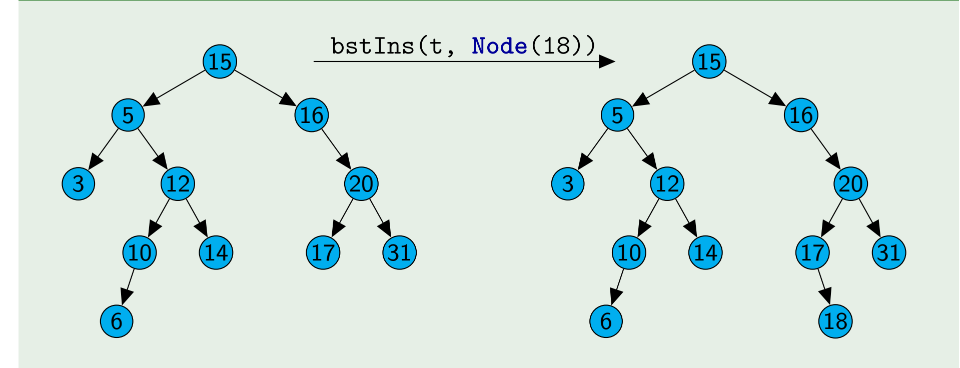
Theorem

Ein RBT mit n inneren Knoten hat höchstens die Höhe $2 \cdot \log(n + 1)$.

- Damit ist ein RBT ein ziemlich balancierter BST.
- ⇒ Suchen benötigt also nur $\Theta(\log n)$ statt $\Theta(n)$ Zeit.
- Für `bstMin`, `bstSucc`, etc. gilt dasselbe.
- Mit Einfügen und Löschen werden wir uns noch beschäftigen.

Erinnerung: Einfügen in einen BST – Beispiel

Beispiel



Einfügen von Schlüssel k in einen RBT – Strategie

Einfügen

Zum Einfügen in einen RBT gehen wir zunächst wie beim BST vor:

- Finde einen geeigneten, freien Platz.
- Hänge den neuen Knoten an.

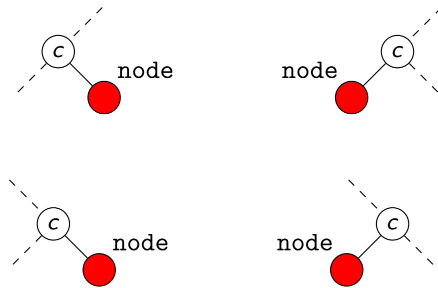
Es bleibt die Frage nach der Farbe:

- Färben wir den neuen Knoten schwarz, dann verletzen wir in der Regel die Schwarz-Höhen-Bedingung.
- Färben wir ihn aber rot, dann könnten wir eine Verletzung der Farbbedingungen bekommen (die Wurzel ist schwarz, rote Knoten haben keine roten Kinder).
- ⇒ Wir färben den Knoten rot – ein Schwarz-Höhen-Verletzung wäre schwieriger zu behandeln.
  - Rot ist sozusagen eine *lokale* Eigenschaft, schwarz eine *globale*.
- Behebe daher im letzten Schritt die mögliche Farbverletzung.

Einfügen in einen RBT – Algorithmus

```
1 void rbtIns(Tree t, Node node) { // Füge node in den Baum t ein
2   bstIns(t, node); // Einfügen wie beim BST
3   node.left = null;
4   node.right = null;
5   node.color = RED; // eingefügter Knoten immer zunächst rot
6   // stelle Rot-Schwarz-Eigenschaft ggf. wieder her
7   rbtInsFix(t, node);
8 }
```

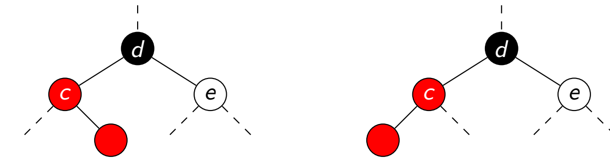
Einfügen – Was kann passieren?



- Der neu eingefügte Knoten ist immer rot.
- Ist die Farbe des Vaterknotens c schwarz (z. B. die Wurzel), haben wir kein Problem.
- Ist c aber rot, dann liegt eine *Rot-Rot-Verletzung* vor, die wir behandeln müssen.
- Die unteren Fälle lassen sich analog (symmetrisch) zu den oberen lösen, daher betrachten wir nur die beiden oberen Situationen.

Einfügen – Was kann passieren?

Wir müssen nun Großvater d und Onkel e mit berücksichtigen:



- Der Großvater des eingefügten Knotens war schwarz, denn es handelte sich vor dem Einfügen um einen korrekten RBT.

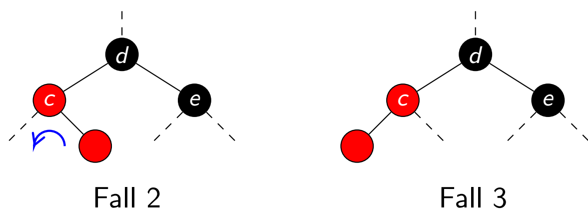
Fall 1

Ist Onkel e rot, dann können wir durch Umfärben von c und e auf schwarz sowie d auf rot die Rot-Schwarz-Eigenschaft lokal wieder herstellen.

- *Zwei Ebenen* weiter oben könnte nun aber eine *Rot-Rot-Verletzung* vorliegen, die nach dem selben Schema iterativ aufgelöst werden kann.
- Ist d allerdings die Wurzel, dann färben wir sie einfach wieder schwarz. Dadurch erhöht sich die Schwarzhöhe des Baumes um 1.

Einfügen – Was kann passieren?

Ist der Onkel e dagegen schwarz, dann erhalten wir Fall 2 und 3:

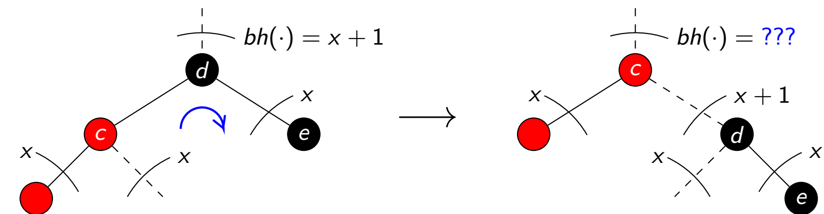


Fall 2

Dieser Fall lässt sich durch Linksrotation um c auf Fall 3 reduzieren.

- Die Schwarz-Höhe des linken Teilbaumes von d ändert sich dadurch nicht.
- Der bisherige Vaterknoten c wird dabei zum linken, roten Kind, das eine Rot-Rot-Verletzung mit dem *neuen Vater* (c im rechten Bild) hat, die wir mit Fall 3 beheben können.

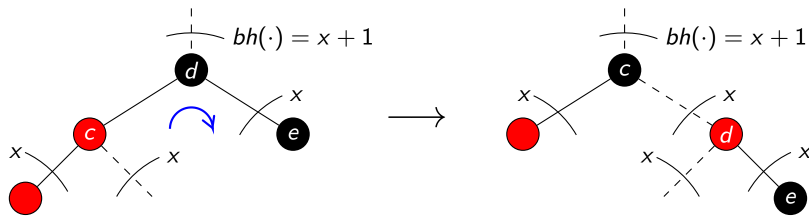
Einfügen – Was kann passieren?



Fall 3

- Zunächst rotieren wir um d nach rechts, wobei wir die Schwarz-Höhen im Auge behalten.
- Um die Schwarz-Höhen der Kinder von c wieder in Einklang zu bringen, färben wir d rot. Da dessen linkes Kind ursprünglich am roten c hing, ist das soweit unproblematisch.

Einfügen – Was kann passieren?



Fall 3

- Zunächst rotieren wir um d nach rechts, wobei wir die Schwarz-Höhen im Auge behalten.
- Um die Schwarz-Höhen der Kinder von c wieder in Einklang zu bringen, färben wir d rot. Da dessen linkes Kind ursprünglich am roten c hing, ist das soweit unproblematisch.
- Färben wir nun c schwarz, dann haben wir wieder einen gültigen RBT. Die Schwarzhöhe des Gesamtbaumes ist unverändert.

Einfügen in einen RBT – Algorithmus Teil 2

```
1 // Behebe eventuelle Rot-Rot-Verletzung mit Vater, node ist rot
2 void rbtInsFix(Tree t, Node node) {
3   // solange noch eine Rot-Rot-Verletzung besteht
4   while (node.parent.color == RED) {
5     if (node.parent == node.parent.parent.left) {
6       // der von uns betrachtete Fall
7       node = leftAdjust(t, node); // node jetzt weiter oben?
8       // (node = node.parent.parent im Fall 1 von leftAdjust)
9     } else {
10      // der dazu symmetrischer Fall
11      node = rightAdjust(t, node);
12    }
13  }
14  t.root.color = BLACK; // Wurzel bleibt schwarz
15 }
```


Einfügen in einen RBT – Algorithmus Teil 3

```
1 Node leftAdjust(Tree t, Node node) {
2   Node uncle = node.parent.parent.right;
3   if (uncle.color == RED) { // Fall 1
4     node.parent.parent.color = RED; // Großvater
5     node.parent.color = BLACK; // Vater
6     uncle.color = BLACK; // Onkel
7     return node.parent.parent; // prüfe Rot-Rot weiter oben
8   } else { // Fall 2 und 3
9     if (node == node.parent.right) { // Fall 2
10      // dieser Knoten wird das linke, rote Kind:
11      node = node.parent;
12      leftRotate(t, node);
13    } // Fall 3
14    rightRotate(t, node.parent.parent);
15    node.parent.color = BLACK;
16    node.parent.right.color = RED;
17    return node; // fertig, node.parent.color == BLACK
18  }
19 }
```


Einfügen in einen RBT – Analyse

Zeitkomplexität Einfügen

Die Worst-Case Laufzeit von `rbtIns` für ein RBT mit n inneren Knoten ist $O(\log n)$.

Beweisskizze:

- Die Worst-Case Laufzeit von `bstIns` ist $O(\log n)$.
- Die Schleife in `rbtInsFix` wird nur wiederholt wenn Fall 1 auftrittt. Dann steigt der Zeiger `node` zwei Ebenen im Baum auf.
- Die maximal Anzahl der Schleifen ist damit $O(\log n)$.
- Maximal 2 Rotationen werden ausgeführt, da die Schleife in `rbtInsFix` terminiert, wenn die Fälle 2 oder 3 auftreten. (Fall 1 involviert keine Rotationen.)

$\Rightarrow$ Die Gesamtanzahl der Rotationen ist konstant und eine Rotation läuft in $O(1)$.

- Somit benötigt `rbtIns` eine Gesamtzeit $O(\log n)$.

Erinnerung: Löschen im BST – Strategie

Löschen

Um Knoten `node` aus dem BST zu löschen, verfahren wir folgendermaßen:

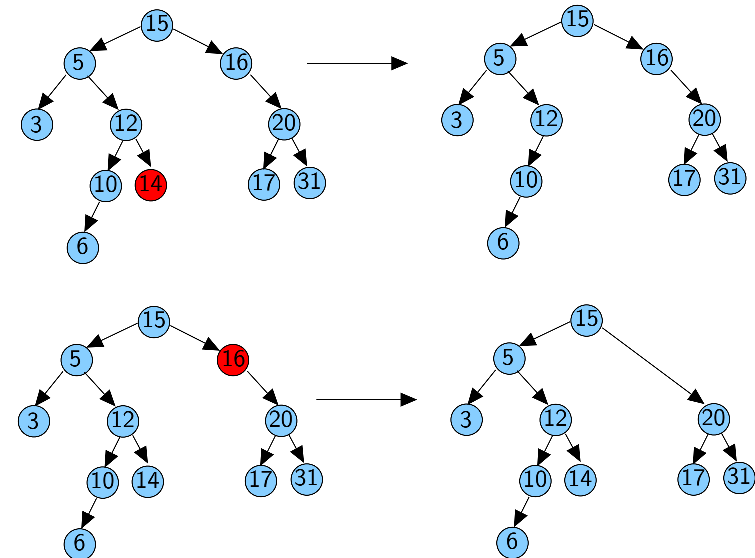
`node` hat keine Kinder:
Ersetze im Vaterknoten von `node` den Zeiger auf `node` durch **`null`**.

`node` hat ein Kind:
Wir schneiden `node` aus, indem wir den Vater und das Kind direkt miteinander verbinden.

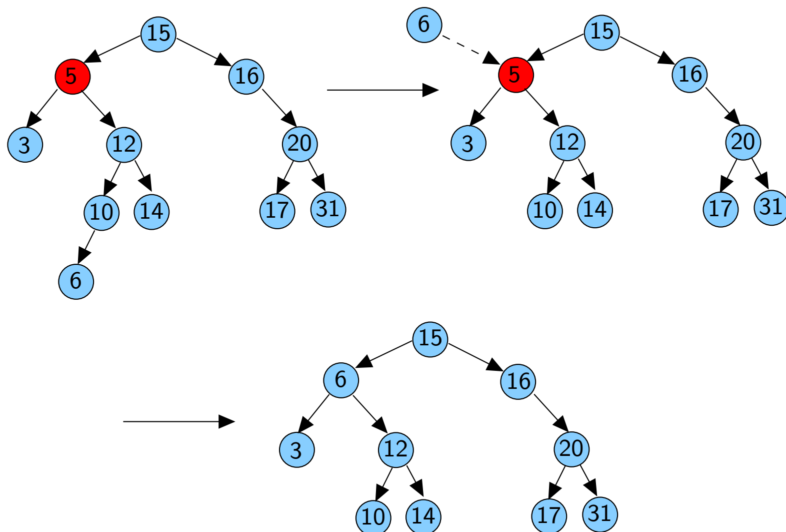
`node` hat zwei Kinder:
Wir finden den Nachfolger von `node`, entfernen ihn aus seiner ursprünglichen Position und ersetzen `node` durch den Nachfolger.

- Der Nachfolger hat höchstens ein Kind.

Löschen im BST: (k)ein Kind



Löschen im BST: zwei Kinder



Löschen im RBT – Strategie (1)

Löschen

Damit der RBT auch nach dem Löschen noch ein RBT ist, müssen wir das Löschverfahren für BSTs ergänzen:

- Werden wir einen roten Knoten (wirklich) löschen, bleibt alles beim alten, da:
  1. im Baum werden keine Schwarzhöhen geändert
  2. es entstehen keine benachbarten roten Knoten
  3. der dann gelöschte Knoten war rot, also bleibt die Wurzel schwarz.

⇒ Also: das Löschen eines roten Knotens liefert ein RBT.

- Wollen wir dagegen einen schwarzen Knoten löschen, dann haben wir auf dem Pfad von der Wurzel zum gelöschten Knoten, bzw. zum an seine Stelle getretenen Knoten einen Schwarzwert zu viel.

⇒ Behebe diese Schwarz-Höhen-Verletzung.

Löschen im RBT – Strategie (2)

Löschen

Insbesondere für den Fall `node` hat zwei Kinder:

1. Wir finden den Nachfolger von `node`
2. Entfernen ihn (mittels `rbtDel`) aus seiner ursprünglichen Position
3. Und beheben dabei die möglich auftretende Farbverletzung
4. Ersetzen `node` durch den Nachfolger, und
5. Übernehmen dabei die möglicherweise *neue* Farbe von `node`.

Dadurch ändert sich *nichts mehr* an den Farben, der *RBT bleibt gültig*!

Erinnerung: Löschen im BST – Algorithmus (Lec 10)

```
1 // Entfernt node aus dem Baum.
2 // Danach kann node ggf. auch aus dem Speicher entfernt werden.
3 void bstDel(Tree t, Node node) {
4   if (node.left && node.right) { // zwei Kinder
5     Node tmp = bstMin(node.right); // finde Nachfolger von node
6     bstDel(t, tmp); // lösche den Nachfolger
7     bstSwap(t, node, tmp); // ersetze node durch den Nachfolger
8   } else if (node.left) { // ein Kind, links
9     bstReplace(t, node, node.left);
10  } else { // ein Kind, oder kein Kind (node.right == null)
11    bstReplace(t, node, node.right);
12  }
13 }
```

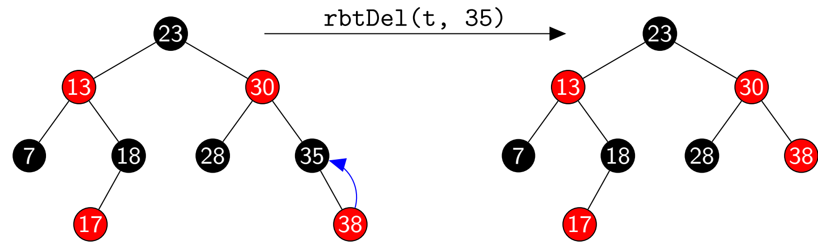

Erinnerung: Löschen im BST – Algorithmus (variant)

```
1 // Entfernt node aus dem Baum.
2 // Danach kann node ggf. auch aus dem Speicher entfernt werden.
3 void bstDel(Tree t, Node node) {
4   if (node.left && node.right) { // zwei Kinder
5     Node tmp = bstMin(node.right); // finde Nachfolger von node
6     bstDel(t, tmp); // lösche den Nachfolger
7     bstSwap(t, node, tmp); // ersetze node durch den Nachfolger
8   } else { // ein Kind, oder kein Kind
9     Node child; // Hilfsvariable
10    if (node.left) child = node.left; // Kind ist links
11      else if (node.right) child = node.right; // ... rechts
12      else child = null; // kein Kind
13    bstReplace(t, node, child);
14  }
15 }
```


Löschen im RBT – Algorithmus Teil 1

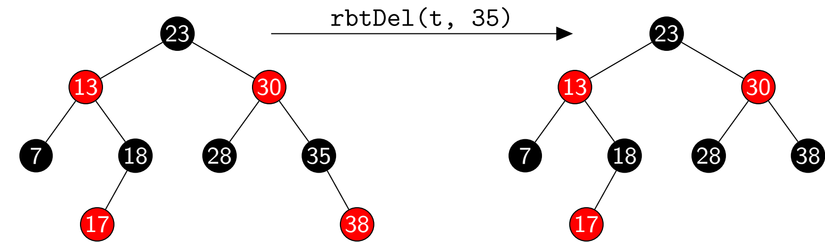
```
1 // Entfernt node aus dem Baum.
2 void rbtDel(Tree t, Node node) {
3   if (node.left && node.right) { // zwei Kinder
4     Node tmp = bstMin(node.right); // finde Nachfolger von node
5     rbtDel(t, tmp); // lösche den Nachfolger
6     bstSwap(t, node, tmp); // ersetze node durch den Nachfolger
7     tmp.color = node.color; // übernimm die Farbe
8   } else { // ein Kind, oder kein Kind
9     Node child; // Hilfsvariable
10    if (node.left) child = node.left; // Kind ist links
11      else if (node.right) child = node.right; // ... rechts
12      else child = null; // kein Kind
13    rbtDelFix(t, node, child);
14    bstReplace(t, node, child);
15  }
16 }
```

Löschen im RBT – Beispiel 1



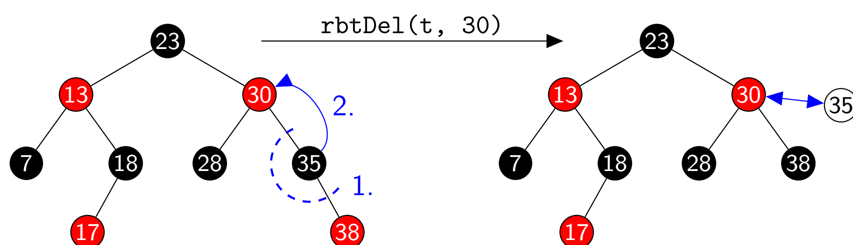
- Wie beim BST tritt der rechte Teilbaum von 35 an dessen Stelle.
- Da einer der beiden Knoten rot ist, kann vorher die Farbe der Knoten einfach „vertauscht“ werden; wir färben dazu 38 schwarz (35 wird sowieso gelöscht).
- Wäre auch 38 bereits schwarz gewesen, hätten wir die Verletzung aufwändiger weiter oben beheben müssen, indem 35 seinen Schwarzwert in Richtung Wurzel „weitergibt“.

Löschen im RBT – Beispiel 1



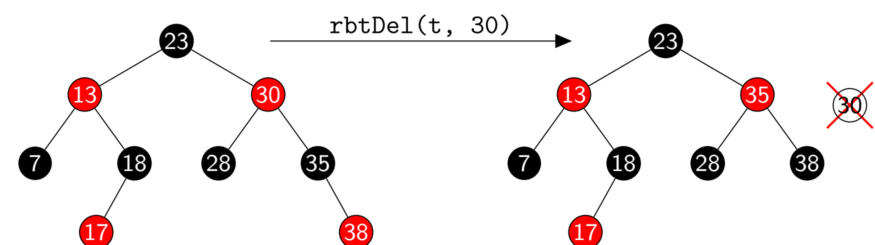
- Wie beim BST tritt der rechte Teilbaum von 35 an dessen Stelle.
- Da einer der beiden Knoten rot ist, kann vorher die Farbe der Knoten einfach „vertauscht“ werden; wir färben dazu 38 schwarz (35 wird sowieso gelöscht).
- Wäre auch 38 bereits schwarz gewesen, hätten wir die Verletzung aufwändiger weiter oben beheben müssen, indem 35 seinen Schwarzwert in Richtung Wurzel „weitergibt“.

Löschen im RBT – Beispiel 2



- Da 30 zwei Kinder hat, finde den Nachfolger.
- Lösche 35 so, dass die RBT-Eigenschaft erhalten bleibt (siehe voriges Beispiel).
- Ersetze 30 durch die nun freie 35, wobei die Farbe von 30 übernommen wird.

Löschen im RBT – Beispiel 2



- Da 30 zwei Kinder hat, finde den Nachfolger.
- Lösche 35 so, dass die RBT-Eigenschaft erhalten bleibt (siehe voriges Beispiel).
- Ersetze 30 durch die nun freie 35, wobei die Farbe von 30 übernommen wird.

Löschen im RBT – Algorithmus Teil 2

```
1 // node soll gelöscht werden, child ist das einzige Kind
2 // (bzw. node hat keine Kinder, dann ist child == null);
3 // ist node rot, so ist nichts zu tun; sonst suchen wir
4 // einen roten Knoten, der durch Umfärben auf schwarz
5 // die schwarze Farbe von node übernimmt
6 void rbtDelFix(Tree t, Node node, Node child) {
7   if (node.color == RED) return;
8   if (child != null && child.color == RED) {
9     child.color = BLACK;
10  } else {
11    Node searchPos = node;
12    // solange der Schwarzwert nicht eingefügt werden kann
13    while (searchPos.parent && searchPos.color == BLACK) {
14      if (searchPos == searchPos.parent.left) // linkes Kind
15        searchPos = delLeftAdjust(t, searchPos);
16      else // rechtes Kind
17        searchPos = delRightAdjust(t, searchPos);
18    }
19    searchPos.color=BLACK;
20  }
21 }
```


Löschen im RBT – Algorithmus Teil 3a

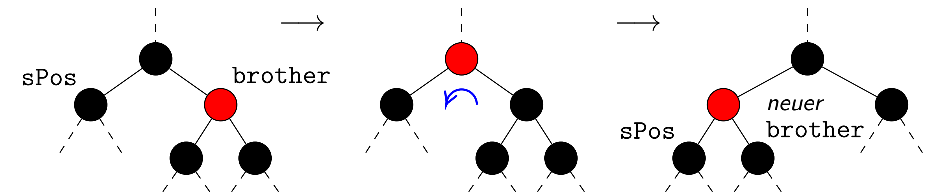
```
1 // Erleichtert node um einen Schwarzwert,
2 // wobei node das linke Kind ist.
3 Node delLeftAdjust(Tree t, Node node) {
4   // brother existiert immer wegen Schwarzhöhe
5   Node brother = node.parent.right;
6   if (brother.color == RED) { // Fall 1: Reduktion auf 2,3,4
7     brother.color = BLACK;
8     node.parent.color = RED; // Vater
9     leftRotate(t, node.parent);
10    brother = node.parent.right; // nun Bruder von node
11  }
          →
```


Löschen im RBT – Algorithmus Teil 3b

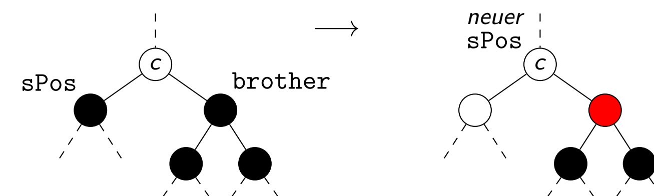
```
12  if (brother.left.color == BLACK &&
13      brother.right.color == BLACK) { // Fall 2
14    brother.color = RED;
15    return node.parent; // Doppel-schwarz weiter oben...
16  } else { // Fall 3 und 4
17    if (brother.right.color == BLACK) // Fall 3
18      brother.left.color = BLACK;
19      brother.color = RED;
20      rightRotate(t, brother);
21      brother = node.parent.right; // nun Bruder von node
22    } // Fall 4
23    brother.color = node.parent.color;
24    node.parent.color = BLACK;
25    brother.right.color = BLACK;
26    leftRotate(t, node.parent);
27    return t.root; // Fertig.
28  }
29 }
```


Der Löschalgorithmus – Fall 1 und 2

Fall 1: (Reduktion auf Fall 2, 3 oder 4)

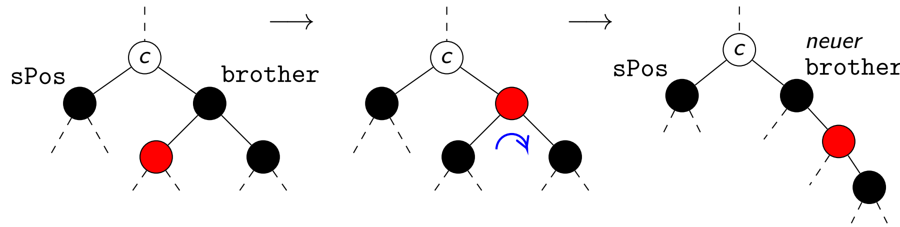


Fall 2:

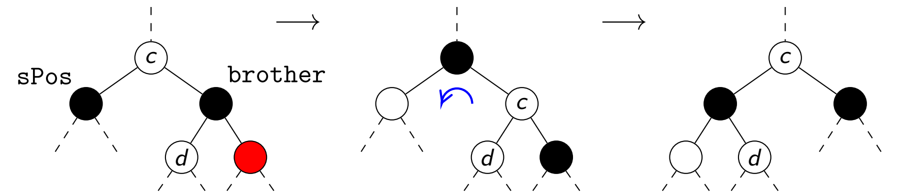


Der Löschalgorithmus – Fall 3 und 4

Fall 3: (Reduktion auf Fall 4)



Fall 4:



Löschen im RBT – Analyse

Zeitkomplexität Löschen

Die Worst-Case Laufzeit von `rbtDel` für ein RBT mit n inneren Knoten ist $O(\log n)$.

Beweisskizze:

- Die Laufzeit von `rbtDel` ohne Aufrufe von `rbtDelFix` ist $O(\log n)$.
- Die Fälle 2, 3, und 4 brauchen höchstens 3 Rotationen und eine konstante Anzahl Farbänderungen.
- Die Schleife in `rbtDelFix` wird nur wiederholt wenn Fall 2 auftrittt. Dann steigt der Zeiger `node` eine Ebene im Baum auf.
- Die maximal Anzahl der Schleifen ist damit $O(\log n)$.
- Somit benötigt `rbtDel` eine Gesamtzeit $O(\log n)$.

Komplexität der RBT-Operationen

Operation	Zeit
`bstSearch`	$\Theta(h)$
`bstSucc`	$\Theta(h)$
`bstMin`	$\Theta(h)$
`bstIns`	$\Theta(h)$
`bstDel`	$\Theta(h)$

Operation	Zeit
`rbtIns`	$\Theta(\log n)$
`rbtDel`	$\Theta(\log n)$

- Alle anderen Operationen wie beim BST, wobei $h = \log n$.

Alle Operationen sind logarithmisch in der Größe des Rot-Schwarz-Baumes

Nächste Vorlesung

Nächste Vorlesung

Montag 4. Juni, 08:30 (Hörsaal H01). Bis dann!