Datenstrukturen und Algorithmen

Vorlesung 2: Asymptotische Effizienz (K3)

Joost-Pieter Katoen

Lehrstuhl für Informatik 2
Software Modeling and Verification Group

https://moves.rwth-aachen.de/teaching/ss-18/dsal/

20. April 2018

Übersicht

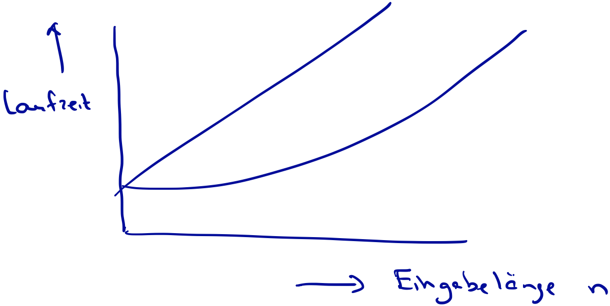
Übersicht

Laufzeit von Algorithmen

Betrachte

Die Laufzeit eines Algorithmus ist keine Zahl, sondern eine Funktion.

Sie gibt die Laufzeit des Algorithmus für jede Eingabelänge an.



Laufzeit von Algorithmen

Betrachte

Die Laufzeit eines Algorithmus ist keine Zahl, sondern eine Funktion.

Sie gibt die Laufzeit des Algorithmus für jede Eingabelänge an.

Worst-Case Laufzeit

Die Worst-Case Laufzeit $W(n)$ für Eingabelänge n ist die längste Laufzeit aus allen Eingaben mit Länge n.

Laufzeit von Algorithmen

Betrachte

Die Laufzeit eines Algorithmus ist keine Zahl, sondern eine Funktion.

Sie gibt die Laufzeit des Algorithmus für jede Eingabelänge an.

Worst-Case Laufzeit

Die Worst-Case Laufzeit $W(n)$ für Eingabelänge n ist die längste Laufzeit aus allen Eingaben mit Länge n.

Best-Case Laufzeit

Die Best-Case Laufzeit $B(n)$ für Eingabelänge n ist die kürzeste Laufzeit aus allen Eingaben mit Länge n.

Asymptotische Betrachtung (I)

average case

Die exakte Bestimmung der Funktionen $A(n)$, $\underline{B}(n)$ und $\underline{W}(n)$ ist üblicherweise sehr schwierig.

Asymptotische Betrachtung (I)

$$A(n) = 13n^2 + 27n - 14$$

Die exakte Bestimmung der Funktionen $A(n)$, $B(n)$ und $W(n)$ ist üblicherweise sehr schwierig. Außerdem:

Asymptotische Betrachtung (I)

Die exakte Bestimmung der Funktionen $A(n)$, $B(n)$ und $W(n)$ ist üblicherweise sehr schwierig. Außerdem:

- ist sie von zweifelhaftem Nutzen für Vergleiche:
  Ist etwa $W(n) = 1021n$ besser als $W(n) = \frac{1}{2}n^2$?

Asymptotische Betrachtung (I)

Die exakte Bestimmung der Funktionen $A(n)$, $B(n)$ und $W(n)$ ist üblicherweise sehr schwierig. Außerdem:

- ist sie von zweifelhaftem Nutzen für Vergleiche:
  Ist etwa $W(n) = 1021n$ besser als $W(n) = \frac{1}{2}n^2$?
- wollen wir maschinenabhängige Konstanten (z. B. Rechnergeschwindigkeit), Initialisierungsaufwand, usw. ausklammern.

Asymptotische Betrachtung (I)

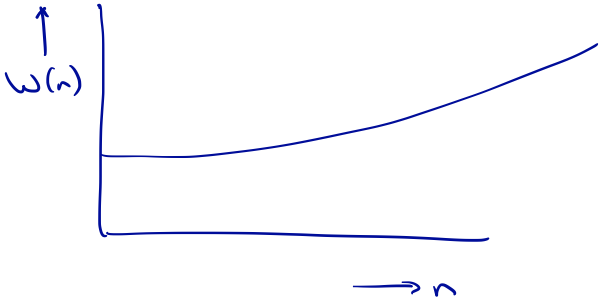
Die exakte Bestimmung der Funktionen $A(n)$, $B(n)$ und $W(n)$ ist üblicherweise sehr schwierig. Außerdem:

- ist sie von zweifelhaftem Nutzen für Vergleiche:
  Ist etwa $W(n) = 1021n$ besser als $W(n) = \frac{1}{2}n^2$?
- wollen wir maschinenabhängige Konstanten (z. B. Rechnergeschwindigkeit), Initialisierungsaufwand, usw. ausklammern.

Daher: Normalerweise keine exakte sondern asymptotische Betrachtung.

Asymptotische Betrachtung (II)

- Betrachte Wachstum der Laufzeit für $n \longrightarrow \infty$.



Asymptotische Betrachtung (II)

- Betrachte Wachstum der Laufzeit für $n \longrightarrow \infty$.
- Kurze Eingaben und konstante Faktoren werden vernachlässigt.

Asymptotische Betrachtung (II)

- Betrachte Wachstum der Laufzeit für $n \longrightarrow \infty$.
- Kurze Eingaben und konstante Faktoren werden vernachlässigt.
- Anschaulich: Wir lassen Glieder niedriger Ordnung weg, z. B. :

$$W(n) = \cancel{3}n^4 + \cancel{5n^3} + \cancel{10} \in O(n^4)$$

(d. h. n^4 ist dominierender Faktor für $n \longrightarrow \infty$)

Asymptotische Betrachtung (II)

- Betrachte Wachstum der Laufzeit für $n \longrightarrow \infty$.
- Kurze Eingaben und konstante Faktoren werden vernachlässigt.
- Anschaulich: Wir lassen Glieder niedriger Ordnung weg, z. B.:

$$W(n) = 3n^4 + 5n^3 + 10 \in O(n^4)$$

(d. h. n^4 ist dominierender Faktor für $n \longrightarrow \infty$)

- So erhalten wir untere/obere Schranken für $A(n)$, $B(n)$ und $W(n)$!

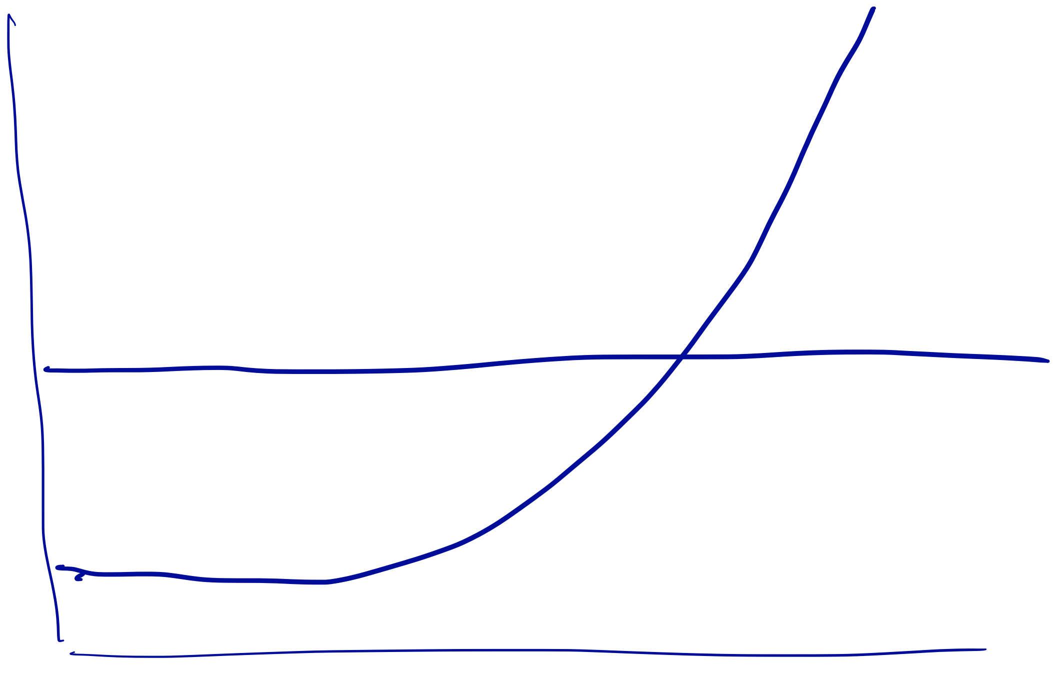
Asymptotische Betrachtung (II)

- Betrachte Wachstum der Laufzeit für $n \longrightarrow \infty$.
- Kurze Eingaben und konstante Faktoren werden vernachlässigt.
- Anschaulich: Wir lassen Glieder niedriger Ordnung weg, z. B. :

$$W(n) = 3n^4 + 5n^3 + 10 \in O(n^4)$$

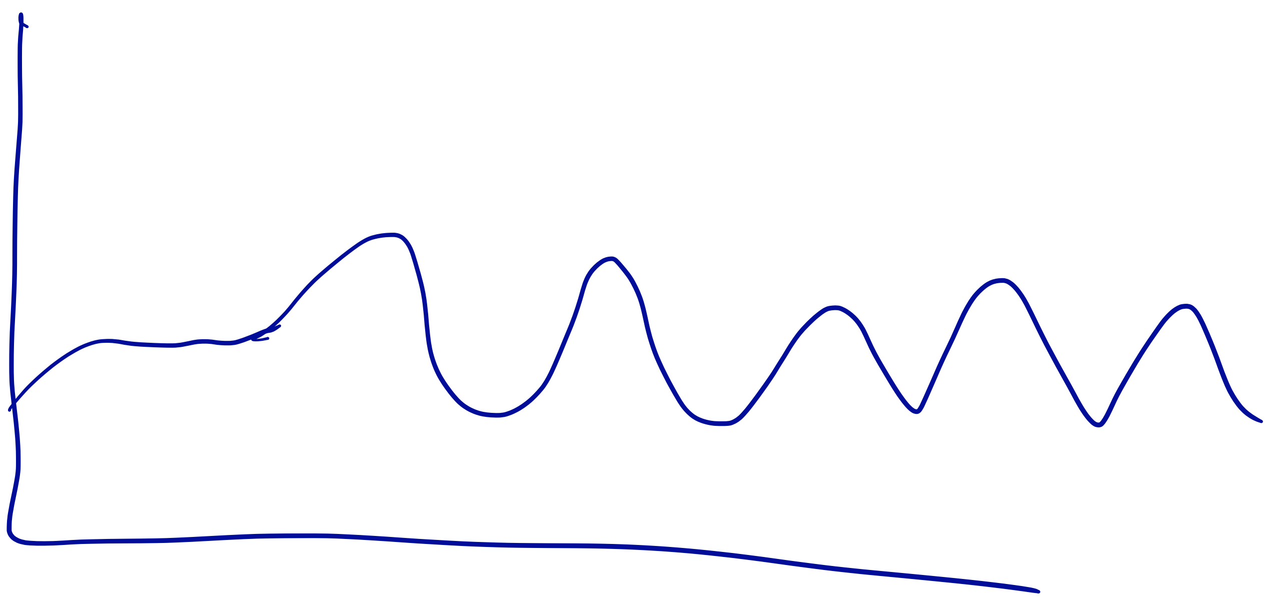
(d. h. n^4 ist dominierender Faktor für $n \longrightarrow \infty$)

- So erhalten wir untere/obere Schranken für $A(n)$, $B(n)$ und $W(n)$!
- Mathematische Zutat: Asymptotische Ordnung von Funktionen.



$\longrightarrow n$

$$\cancel{\lim_{n \to \infty} w(n)}$$



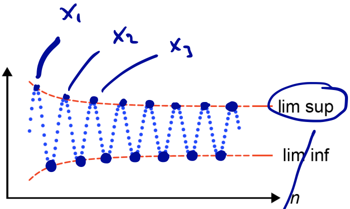
Grenzwerte

min

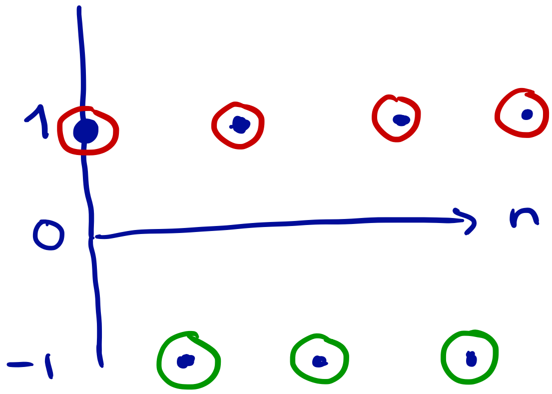
Limes inferior und Limes superior

Sei $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ die Folge $x_1, x_2, \ldots$. Dann:

1. $\liminf\limits_{n \to \infty} x_n \;=\; \lim\limits_{n \to \infty} \left(\inf\limits_{m \geqslant n} x_m \right)$
2. $\limsup\limits_{n \to \infty} x_n \;=\; \lim\limits_{n \to \infty} \left(\sup\limits_{m \geqslant n} x_m \right)$



Beispiel $\quad x_n = (-1)^n$



$|x_n| \leq 1 \longrightarrow$ lim sup + lim inf existieren

$$\limsup_{n\to\infty} = \lim_{n\to\infty} \left(\sup_{m\geq n} x_m \right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \underbrace{\left(\max_{m\geq n} x_m \right)}_{=1} = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$$

$$\liminf_{n\to\infty} = \text{analog} = -1$$

$$(x_i)_{i \in \mathbb{N}} = 1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, 1, \ldots$$

$$\limsup_{n \to \infty} x_n = 1 = \lim_{n \to \infty} \max x_n$$

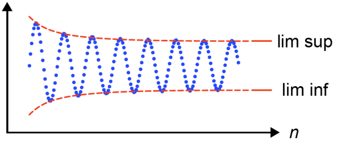
$$\liminf_{n \to \infty} x_n = 0 \neq \lim_{n \to \infty} \min x_n$$

Grenzwerte

Limes inferior und Limes superior

Sei $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ die Folge $x_1, x_2, \ldots$. Dann:

1. $\liminf\limits_{n \to \infty} x_n \; = \; \lim\limits_{n \to \infty} \left(\inf\limits_{m \geqslant n} x_m \right)$
2. $\limsup\limits_{n \to \infty} x_n \; = \; \lim\limits_{n \to \infty} \left(\sup\limits_{m \geqslant n} x_m \right)$



Einige Fakten

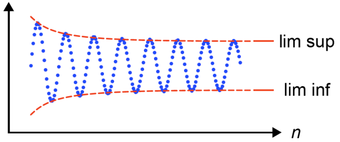
1. Existieren $\liminf\limits_{n \to \infty} x_n$ und $\limsup\limits_{n \to \infty} x_n$: $\liminf\limits_{n \to \infty} x_n \leqslant \limsup\limits_{n \to \infty} x_n$.

Grenzwerte

Limes inferior und Limes superior

Sei $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ die Folge $x_1, x_2, \ldots$. Dann:

1. $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n \;=\; \lim\limits_{n\to\infty} \left(\inf\limits_{m\geqslant n} x_m \right)$
2. $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n \;=\; \lim\limits_{n\to\infty} \left(\sup\limits_{m\geqslant n} x_m \right)$



Einige Fakten

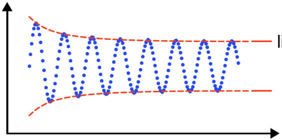
1. Existieren $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n$ und $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n$: $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n \;\leqslant\; \limsup\limits_{n\to\infty} x_n$.
2. Existiert $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ dann: $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n \;=\; \limsup\limits_{n\to\infty} x_n \;=\; \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Grenzwerte

Limes inferior und Limes superior

Sei $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ die Folge $x_1, x_2, \ldots$. Dann:

1. $\liminf\limits_{n \to \infty} x_n = \lim\limits_{n \to \infty} \left(\inf\limits_{m \geqslant n} x_m \right)$
2. $\limsup\limits_{n \to \infty} x_n = \lim\limits_{n \to \infty} \left(\sup\limits_{m \geqslant n} x_m \right)$



Einige Fakten

1. Existieren $\liminf\limits_{n \to \infty} x_n$ und $\limsup\limits_{n \to \infty} x_n$: $\liminf\limits_{n \to \infty} x_n \leqslant \limsup\limits_{n \to \infty} x_n$.
2. Existiert $\lim\limits_{n \to \infty} x_n$ dann: $\liminf\limits_{n \to \infty} x_n = \limsup\limits_{n \to \infty} x_n = \lim\limits_{n \to \infty} x_n$.

Sind f, g differenzierbar, dann gilt $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} \dfrac{g(n)}{f(n)} = \lim\limits_{n \longrightarrow \infty} \dfrac{g'(n)}{f'(n)}$. L'Hôpital

Übersicht

1. Asymptotische Betrachtung
   - Begründung
   - Grenzwerte
2. Asymptotische Komplexitätsklassen
   - Die Klasse Groß-O
   - Die Klasse Groß-Omega
   - Die Klasse Groß-Theta
3. Platzkomplexität

Landau 1909

O = "Ordnung"

obere Schranke

untere Schranken

exakte Schranke

Die Klasse Groß-O (I)

Seien f und g Funktionen von $\mathbb{N}$ (Eingabelänge) nach $\mathbb{R}_{\geqslant 0}$ (Laufzeit) und $c > 0$.

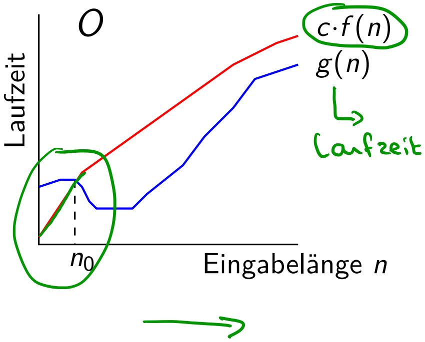
Die Klasse Groß-O (I)

Seien f und g Funktionen von $\mathbb{N}$ (Eingabelänge) nach $\mathbb{R}_{\geqslant 0}$ (Laufzeit) und $c > 0$.

$O(f)$ ist die *Menge* von Funktionen, die nicht schneller als f wachsen.

- $g \in O(f)$ heißt: $c \cdot f(n)$ ist obere Schranke für $g(n)$.

Diese Eigenschaft gilt ab einer Konstanten n_0; Werte unter n_0 werden vernachlässigt.



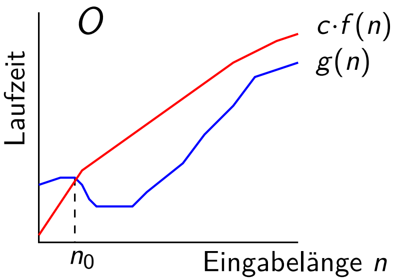
Die Klasse Groß-O (I)

Seien f und g Funktionen von $\mathbb{N}$ (Eingabelänge) nach $\mathbb{R}_{\geqslant 0}$ (Laufzeit) und $c > 0$.

$O(f)$ ist die *Menge* von Funktionen, die nicht schneller als f wachsen.

- $g \in O(f)$ heißt: $c \cdot f(n)$ ist obere Schranke für $g(n)$.

Diese Eigenschaft gilt ab einer Konstanten n_0; Werte unter n_0 werden vernachlässigt.



Definition

$g \in O(f)$ gdw. $\exists c > 0,\ n_0$ mit $\forall n \geqslant n_0 : 0 \leqslant g(n) \leqslant c \cdot f(n)$.

Beispiel

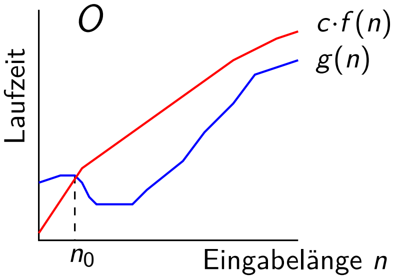
Die Klasse Groß-O (I)

Seien f und g Funktionen von $\mathbb{N}$ (Eingabelänge) nach $\mathbb{R}_{\geqslant 0}$ (Laufzeit) und $c > 0$.

$O(f)$ ist die *Menge* von Funktionen, die nicht schneller als f wachsen.

- $g \in O(f)$ heißt: $c \cdot f(n)$ ist obere Schranke für $g(n)$.

Diese Eigenschaft gilt ab einer Konstanten n_0; Werte unter n_0 werden vernachlässigt.



Definition (alternativ)

$g \in O(f)$ gdw. $\limsup_{n \longrightarrow \infty} \frac{g(n)}{f(n)} = c \geqslant 0$ mit $c \neq \infty$.

Die Klasse Groß-O (II)

Definition (Die Klasse Groß-O)

$g \in O(f)$ gdw. $\exists c > 0,\ n_0$ mit $\forall n \geqslant n_0 : 0 \leqslant g(n) \leqslant c \cdot f(n)$.

Die Klasse Groß-O (II)

Definition (Die Klasse Groß-O)

$g \in O(f)$ gdw. $\exists c > 0,\ n_0$ mit $\forall n \geqslant n_0 : 0 \leqslant g(n) \leqslant c \cdot f(n)$.

Definition (alternativ)

$g \in O(f)$ gdw. $\limsup_{n \longrightarrow \infty} \frac{g(n)}{f(n)} = c \geqslant 0$ mit $c \neq \infty$.

Die Klasse Groß-O (II)

Definition (Die Klasse Groß-O)

$g \in O(f)$ gdw. $\exists c > 0,\ n_0$ mit $\forall n \geqslant n_0 : 0 \leqslant g(n) \leqslant c \cdot f(n)$. $**$

Definition (alternativ)

$g \in O(f)$ gdw. $\limsup_{n \longrightarrow \infty} \frac{g(n)}{f(n)} = c \geqslant 0$ mit $c \neq \infty$. $*$

Theorem

Es seien $f, g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ zwei Funktionen. Es sei nur endlich oft $f(n) = 0$. Dann:

$\underbrace{\limsup_{n \longrightarrow \infty} \frac{g(n)}{f(n)} \text{ existiert}}_{*}$ *gdw.* $\underbrace{\exists c > 0,\ n_0 \text{ mit } \forall n \geqslant n_0 : g(n) \leqslant c \cdot f(n)}_{**}$.

Die Klasse Groß-O (III)

Theorem

Es seien f, $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ zwei Funktionen. Es sei nur endlich oft $f(n) = 0$. Dann existiert $\limsup_{n \longrightarrow \infty} \frac{g(n)}{f(n)}$ gdw. $\exists c > 0, n_0. \forall n \geqslant n_0 : g(n) \leqslant c \cdot f(n)$.

„$\Longrightarrow$" „$\Longleftarrow$"

Die Klasse Groß-O (III)

Theorem

Es seien $f, g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ *zwei Funktionen. Es sei nur endlich oft* $f(n) = 0$*.*
Dann existiert $\limsup_{n \longrightarrow \infty} \frac{g(n)}{f(n)}$ *gdw.* $\exists c > 0, n_0. \forall n \geqslant n_0 : g(n) \leqslant c \cdot f(n)$*.*

Beweis.

„$\Longrightarrow$“:

Die Klasse Groß-O (III)

Theorem

Es seien $f, g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ zwei Funktionen. Es sei nur endlich oft $f(n) = 0$. Dann existiert $\limsup_{n \longrightarrow \infty} \frac{g(n)}{f(n)}$ gdw. $\exists c > 0, n_0. \forall n \geqslant n_0 : g(n) \leqslant c \cdot f(n)$.

Beweis.

„$\Longrightarrow$“: Sei $\limsup_{n \longrightarrow \infty} \frac{g(n)}{f(n)} = c < \infty$.

Die Klasse Groß-O (III)

Theorem

Es seien $f, g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ zwei Funktionen. Es sei nur endlich oft $f(n) = 0$. Dann existiert $\limsup_{n \longrightarrow \infty} \frac{g(n)}{f(n)}$ gdw. $\exists c > 0, n_0. \forall n \geqslant n_0 : g(n) \leqslant c \cdot f(n)$.

Beweis.

„$\Longrightarrow$": Sei $\limsup_{n \longrightarrow \infty} \frac{g(n)}{f(n)} = c < \infty$. Für $\underline{\varepsilon \geqslant 0}$ es folgt $\underline{c + \varepsilon} \geqslant \frac{g(n)}{f(n)}$ und $f(n) \neq 0$ bis auf endlich viele Ausnahmen.

Die Klasse Groß-O (III)

Theorem

Es seien $f, g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ *zwei Funktionen. Es sei nur endlich oft* $f(n) = 0$. *Dann existiert* $\limsup_{n \longrightarrow \infty} \frac{g(n)}{f(n)}$ *gdw.* $\exists c > 0, n_0. \forall n \geqslant n_0 : g(n) \leqslant c \cdot f(n)$.

Beweis.

„$\Longrightarrow$“: Sei $\limsup_{n \longrightarrow \infty} \frac{g(n)}{f(n)} = c < \infty$. Für $\varepsilon \geqslant 0$ es folgt $c + \varepsilon \geqslant \frac{g(n)}{f(n)}$ und $f(n) \neq 0$ bis auf endlich viele Ausnahmen. Ab einem $n_0 \in \mathbb{N}$ gilt für alle $n \geqslant n_0$ also: $c + \varepsilon \geqslant \frac{g(n)}{f(n)}$;

Die Klasse Groß-O (III)

Theorem

Es seien $f, g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ zwei Funktionen. Es sei nur endlich oft $f(n) = 0$. Dann existiert $\limsup_{n \longrightarrow \infty} \frac{g(n)}{f(n)}$ *gdw.* $\exists c > 0, n_0. \forall n \geqslant n_0 : g(n) \leqslant c \cdot f(n)$.

Beweis.

„$\Longrightarrow$“: Sei $\limsup_{n \longrightarrow \infty} \frac{g(n)}{f(n)} = c < \infty$. Für $\varepsilon \geqslant 0$ es folgt $c + \varepsilon \geqslant \frac{g(n)}{f(n)}$ und $f(n) \neq 0$ bis auf endlich viele Ausnahmen. Ab einem $n_0 \in \mathbb{N}$ gilt für alle $n \geqslant n_0$ also: $c + \varepsilon \geqslant \frac{g(n)}{f(n)}$; und damit: $g(n) \leqslant (c + \varepsilon) \cdot f(n)$.

Die Klasse Groß-O (III)

Theorem

Es seien $f, g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ zwei Funktionen. Es sei nur endlich oft $f(n) = 0$. Dann existiert $\limsup_{n \longrightarrow \infty} \frac{g(n)}{f(n)}$ gdw. $\exists c > 0, n_0. \forall n \geqslant n_0 : g(n) \leqslant c \cdot f(n)$.

Beweis.

„$\Longrightarrow$“: Sei $\limsup_{n \longrightarrow \infty} \frac{g(n)}{f(n)} = c < \infty$. Für $\varepsilon \geqslant 0$ es folgt $c + \varepsilon \geqslant \frac{g(n)}{f(n)}$ und $f(n) \neq 0$ bis auf endlich viele Ausnahmen. Ab einem $n_0 \in \mathbb{N}$ gilt für alle $n \geqslant n_0$ also: $c + \varepsilon \geqslant \frac{g(n)}{f(n)}$; und damit: $g(n) \leqslant (c + \varepsilon) \cdot f(n)$.

„$\Longleftarrow$“:

Die Klasse Groß-O (III)

Theorem

Es seien $f, g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ zwei Funktionen. Es sei nur endlich oft $f(n) = 0$. Dann existiert $\limsup_{n\longrightarrow\infty} \frac{g(n)}{f(n)}$ gdw. $\exists c > 0, n_0. \forall n \geqslant n_0 : g(n) \leqslant c \cdot f(n)$.

Beweis.

„$\Longrightarrow$“: Sei $\limsup_{n\longrightarrow\infty} \frac{g(n)}{f(n)} = c < \infty$. Für $\varepsilon \geqslant 0$ es folgt $c + \varepsilon \geqslant \frac{g(n)}{f(n)}$ und $f(n) \neq 0$ bis auf endlich viele Ausnahmen. Ab einem $n_0 \in \mathbb{N}$ gilt für alle $n \geqslant n_0$ also: $c + \varepsilon \geqslant \frac{g(n)}{f(n)}$; und damit: $g(n) \leqslant (c + \varepsilon) \cdot f(n)$.

„$\Longleftarrow$“: Gegeben seien nun n_0', $c > 0$ so dass $\forall n \geqslant n_0' : g(n) \leqslant c \cdot f(n)$.

Die Klasse Groß-O (III)

Theorem

Es seien $f, g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ zwei Funktionen. Es sei nur endlich oft $f(n) = 0$. Dann existiert $\limsup_{n \longrightarrow \infty} \frac{g(n)}{f(n)}$ gdw. $\exists c > 0, n_0. \forall n \geqslant n_0 : g(n) \leqslant c \cdot f(n)$.

Beweis.

„$\Longrightarrow$“: Sei $\limsup_{n \longrightarrow \infty} \frac{g(n)}{f(n)} = c < \infty$. Für $\varepsilon \geqslant 0$ es folgt $c + \varepsilon \geqslant \frac{g(n)}{f(n)}$ und $f(n) \neq 0$ bis auf endlich viele Ausnahmen. Ab einem $n_0 \in \mathbb{N}$ gilt für alle $n \geqslant n_0$ also: $c + \varepsilon \geqslant \frac{g(n)}{f(n)}$; und damit: $g(n) \leqslant (c + \varepsilon) \cdot f(n)$.

„$\Longleftarrow$“: Gegeben seien nun $n_0', c > 0$ so dass $\forall n \geqslant n_0' : g(n) \leqslant c \cdot f(n)$. Ab einem $n_0 \geqslant n_0'$ gilt (wie oben) außerdem $f(n) \neq 0$ für alle $n \geqslant n_0$.

Die Klasse Groß-O (III)

Theorem

Es seien $f, g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ zwei Funktionen. Es sei nur endlich oft $f(n) = 0$. Dann existiert $\limsup_{n \longrightarrow \infty} \frac{g(n)}{f(n)}$ gdw. $\exists c > 0, n_0. \forall n \geqslant n_0 : g(n) \leqslant c \cdot f(n)$.

Beweis.

„$\Longrightarrow$“: Sei $\limsup_{n \longrightarrow \infty} \frac{g(n)}{f(n)} = c < \infty$. Für $\varepsilon \geqslant 0$ es folgt $c + \varepsilon \geqslant \frac{g(n)}{f(n)}$ und $f(n) \neq 0$ bis auf endlich viele Ausnahmen. Ab einem $n_0 \in \mathbb{N}$ gilt für alle $n \geqslant n_0$ also: $c + \varepsilon \geqslant \frac{g(n)}{f(n)}$; und damit: $g(n) \leqslant (c + \varepsilon) \cdot f(n)$.

„$\Longleftarrow$“: Gegeben seien nun n_0', $c > 0$ so dass $\forall n \geqslant n_0' : g(n) \leqslant c \cdot f(n)$. Ab einem $n_0 \geqslant n_0'$ gilt (wie oben) außerdem $f(n) \neq 0$ für alle $n \geqslant n_0$. Damit ist $\forall n \geqslant n_0 : 0 \leqslant \frac{g(n)}{f(n)} \leqslant c$.

Die Klasse Groß-O (III)

Theorem

Es seien $f, g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ *zwei Funktionen. Es sei nur endlich oft* $f(n) = 0$. *Dann existiert* $\limsup_{n \longrightarrow \infty} \frac{g(n)}{f(n)}$ *gdw.* $\exists c > 0, n_0. \forall n \geqslant n_0 : g(n) \leqslant c \cdot f(n)$.

Beweis.

„$\Longrightarrow$": Sei $\limsup_{n \longrightarrow \infty} \frac{g(n)}{f(n)} = c < \infty$. Für $\varepsilon \geqslant 0$ es folgt $c + \varepsilon \geqslant \frac{g(n)}{f(n)}$ und $f(n) \neq 0$ bis auf endlich viele Ausnahmen. Ab einem $n_0 \in \mathbb{N}$ gilt für alle $n \geqslant n_0$ also: $c + \varepsilon \geqslant \frac{g(n)}{f(n)}$; und damit: $g(n) \leqslant (c + \varepsilon) \cdot f(n)$.

„$\Longleftarrow$": Gegeben seien nun n_0', $c > 0$ so dass $\forall n \geqslant n_0' : g(n) \leqslant c \cdot f(n)$. Ab einem $n_0 \geqslant n_0'$ gilt (wie oben) außerdem $f(n) \neq 0$ für alle $n \geqslant n_0$. Damit ist $\forall n \geqslant n_0 : 0 \leqslant \frac{g(n)}{f(n)} \leqslant c$.

Die Folge $a_n = \frac{g(n)}{f(n)}$ ist in $[0, c]$, also beschränkt und abgeschlossen.

Die Klasse Groß-O (III)

Theorem

Es seien $f, g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ *zwei Funktionen. Es sei nur endlich oft* $f(n) = 0$. *Dann existiert* $\limsup_{n\longrightarrow\infty} \frac{g(n)}{f(n)}$ *gdw.* $\exists c > 0, n_0. \forall n \geqslant n_0 : g(n) \leqslant c \cdot f(n)$.

Beweis.

„$\Longrightarrow$": Sei $\limsup_{n\longrightarrow\infty} \frac{g(n)}{f(n)} = c < \infty$. Für $\varepsilon \geqslant 0$ es folgt $c + \varepsilon \geqslant \frac{g(n)}{f(n)}$ und $f(n) \neq 0$ bis auf endlich viele Ausnahmen. Ab einem $n_0 \in \mathbb{N}$ gilt für alle $n \geqslant n_0$ also: $c + \varepsilon \geqslant \frac{g(n)}{f(n)}$; und damit: $g(n) \leqslant (c + \varepsilon) \cdot f(n)$.

„$\Longleftarrow$": Gegeben seien nun n_0', $c > 0$ so dass $\forall n \geqslant n_0' : g(n) \leqslant c \cdot f(n)$. Ab einem $n_0 \geqslant n_0'$ gilt (wie oben) außerdem $f(n) \neq 0$ für alle $n \geqslant n_0$. Damit ist $\forall n \geqslant n_0 : 0 \leqslant \frac{g(n)}{f(n)} \leqslant c$.

Die Folge $a_n = \frac{g(n)}{f(n)}$ ist in $[0, c]$, also beschränkt und abgeschlossen. Dann existiert $\limsup_{n\longrightarrow\infty} a_n < \infty$. □

Die Klasse Groß-O (IV)

Definition

$g \in O(f)$ gdw. $\exists c > 0,\ n_0$ mit $\forall n \geqslant n_0 : 0 \leqslant g(n) \leqslant c \cdot f(n)$.

Definition (alternativ)

$g \in O(f)$ gdw. $\limsup_{n \longrightarrow \infty} \frac{g(n)}{f(n)} = c \geqslant 0$ mit $c \neq \infty$.

Die Klasse Groß-O (IV)

Definition

$g \in O(f)$ gdw. $\exists c > 0,\ n_0$ mit $\forall n \geqslant n_0 : 0 \leqslant g(n) \leqslant c \cdot f(n)$.

Definition (alternativ)

$g \in O(f)$ gdw. $\limsup_{n \longrightarrow \infty} \frac{g(n)}{f(n)} = c \geqslant 0$ mit $c \neq \infty$.

Beispiel

Betrachte $g(n) = 3n^2 + 10n + 6$. Dann ist:

Die Klasse Groß-O (IV)

Definition

$g \in O(f)$ gdw. $\exists c > 0,\ n_0$ mit $\forall n \geqslant n_0 : 0 \leqslant g(n) \leqslant c \cdot f(n)$.

Definition (alternativ)

$g \in O(f)$ gdw. $\limsup_{n \longrightarrow \infty} \frac{g(n)}{f(n)} = c \geqslant 0$ mit $c \neq \infty$.

Beispiel

Betrachte $g(n) = \cancel{3}n^2 + \cancel{1}0n + \cancel{6}$. Dann ist:

- $\underline{g \notin O(n)}$, da $\limsup_{n \longrightarrow \infty} \underline{g(n)}/\underline{n} = \infty$.

f(n)

Die Klasse Groß-O (IV)

Definition

$g \in O(f)$ gdw. $\exists c > 0, n_0$ mit $\forall n \geqslant n_0 : 0 \leqslant g(n) \leqslant c \cdot f(n)$.

Definition (alternativ)

$g \in O(f)$ gdw. $\limsup_{n \longrightarrow \infty} \frac{g(n)}{f(n)} = c \geqslant 0$ mit $c \neq \infty$.

Beispiel

Betrachte $g(n) = 3n^2 + 10n + 6$. Dann ist:

- $g \notin O(n)$, da $\limsup_{n \longrightarrow \infty} g(n)/n = \infty$.
- $g \in O(n^2)$, da $g(n) \leqslant 20n^2$ für $n \geqslant 1$.

$3n^2 + 10n + 6$

$\leqslant$

$\underbrace{20}_{c} n^2 \quad \forall n \geqslant 1$

Die Klasse Groß-O (IV)

Definition

$g \in O(f)$ gdw. $\exists c > 0, n_0$ mit $\forall n \geqslant n_0 : 0 \leqslant g(n) \leqslant c \cdot f(n)$.

Definition (alternativ)

$g \in O(f)$ gdw. $\limsup_{n \longrightarrow \infty} \frac{g(n)}{f(n)} = c \geqslant 0$ mit $c \neq \infty$.

Beispiel

Betrachte $g(n) = 3n^2 + 10n + 6$. Dann ist:

- $g \notin O(n)$, da $\limsup_{n \longrightarrow \infty} g(n)/n = \infty$.
- $g \in O(n^2)$, da $g(n) \leqslant 20n^2$ für $n \geqslant 1$.
- $g \in O(n^3)$, da $g(n) \leqslant \frac{1}{10} n^3$ für n hinreichend groß.

c

$c / 27n^3$

Behauptung:

$$\underbrace{\log n}_{g} \in O(\underbrace{\sqrt{n}}_{f})$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log_2 n}{\sqrt{n}} = (\text{L'Hôpital})$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(\log_2 n)'}{(\sqrt{n})'} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n \cdot \ln 2}}{\frac{1}{2} \cdot n^{-\frac{1}{2}}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n \cdot n^{-\frac{1}{2}} \cdot \ln 2}$$

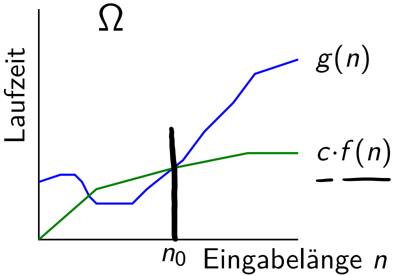
$$= \frac{2}{\ln 2} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0. \boxtimes$$

Die Klasse Groß-Omega (I)

$\Omega(f)$ ist die *Menge* von Funktionen, die nicht langsamer als f wachsen.

- $g \in \Omega(f)$ heißt: $c \cdot f(n)$ ist untere Schranke für $g(n)$.

Diese Eigenschaft gilt ab einer Konstanten n_0; Werte unter n_0 werden vernachlässigt.

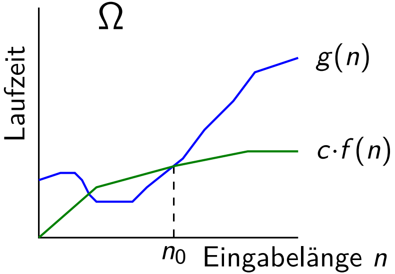


Die Klasse Groß-Omega (I)

$\Omega(f)$ ist die *Menge* von Funktionen, die nicht langsamer als f wachsen.

- $g \in \Omega(f)$ heißt: $c \cdot f(n)$ ist untere Schranke für $g(n)$.

Diese Eigenschaft gilt ab einer Konstanten n_0; Werte unter n_0 werden vernachlässigt.



Definition

$g \in \Omega(f)$ gdw. $\exists c > 0,\ n_0$ mit $\forall n \geqslant n_0 : c \cdot f(n) \leqslant g(n)$.

Definition (alternativ)

$g \in \Omega(f)$ gdw. $\liminf_{n \longrightarrow \infty} \frac{g(n)}{f(n)} > 0$.

Die Klasse Groß-Omega (II)

Definition (Die Klasse Groß-Omega)

$g \in \Omega(f)$ gdw. $\exists c > 0,\ n_0$ mit $\forall n \geqslant n_0 : c \cdot f(n) \leqslant g(n)$.

Die Klasse Groß-Omega (II)

Definition (Die Klasse Groß-Omega)

$g \in \Omega(f)$ gdw. $\exists c > 0,\ n_0$ mit $\forall n \geqslant n_0 : c \cdot f(n) \leqslant g(n)$.

Definition (alternativ)

$g \in \Omega(f)$ gdw. $\liminf_{n \longrightarrow \infty} \frac{g(n)}{f(n)} > 0$.

Die Klasse Groß-Omega (II)

Definition (Die Klasse Groß-Omega)

$g \in \Omega(f)$ gdw. $\exists c > 0,\ n_0$ mit $\forall n \geqslant n_0 : c \cdot f(n) \leqslant g(n)$.

Definition (alternativ)

$g \in \Omega(f)$ gdw. $\liminf_{n \longrightarrow \infty} \frac{g(n)}{f(n)} > 0$.

Beispiel

Betrachte $g(n) = 3n^2 + 10n + 6$. Dann ist:

Die Klasse Groß-Omega (II)

Definition (Die Klasse Groß-Omega)

$g \in \Omega(f)$ gdw. $\exists c > 0,\ n_0$ mit $\forall n \geqslant n_0 : c \cdot f(n) \leqslant g(n)$.

Definition (alternativ)

$g \in \Omega(f)$ gdw. $\liminf_{n \longrightarrow \infty} \frac{g(n)}{f(n)} > 0$.

Beispiel

Betrachte $g(n) = 3n^2 + 10n + 6$. Dann ist:

- $g \in \Omega(n)$, da $\liminf_{n \longrightarrow \infty} g(n)/n = \infty > 0$.

$$\lim_{n \to \infty} \frac{3n^2 + 10n + 6}{n} = \lim_{n \to \infty} 3n + 10 + \frac{6}{n} = \infty$$

Die Klasse Groß-Omega (II)

Definition (Die Klasse Groß-Omega)

$g \in \Omega(f)$ gdw. $\exists c > 0,\ n_0$ mit $\forall n \geqslant n_0 : c \cdot f(n) \leqslant g(n)$.

Definition (alternativ)

$g \in \Omega(f)$ gdw. $\liminf_{n \longrightarrow \infty} \frac{g(n)}{f(n)} > 0$.

Beispiel

Betrachte $g(n) = 3n^2 + 10n + 6$. Dann ist:

- $g \in \Omega(n)$, da $\liminf_{n \longrightarrow \infty} g(n)/n = \infty > 0$.
- $g \in \Omega(n^2)$, da $\liminf_{n \longrightarrow \infty} g(n)/n^2 = 3 > 0$.

$$\lim_{n \to \infty} \frac{3n^2 + 10n + 6}{n^2} = \lim_{n \to \infty} 3 + \cancel{\frac{10}{n}} + \cancel{\frac{6}{n^2}} = 3$$

Die Klasse Groß-Omega (II)

Definition (Die Klasse Groß-Omega)

$g \in \Omega(f)$ gdw. $\exists c > 0, n_0$ mit $\forall n \geqslant n_0 : c \cdot f(n) \leqslant g(n)$. *

Definition (alternativ)

$g \in \Omega(f)$ gdw. $\liminf_{n \longrightarrow \infty} \frac{g(n)}{f(n)} > 0$.

Beispiel

Betrachte $g(n) = 3n^2 + 10n + 6$. Dann ist:

- $g \in \Omega(n)$, da $\liminf_{n \longrightarrow \infty} g(n)/n = \infty > 0$.
- $g \in \Omega(n^2)$, da $\liminf_{n \longrightarrow \infty} g(n)/n^2 = 3 > 0$.
- $g \notin \Omega(n^3)$, da $g(n) \leqslant 5n^3$ für $n \geqslant 2$.

$$\log n! \in \Omega(n \log n)$$

zu zeigen:

$$\exists c > 0 .\ n_0 > 0 .\ (\forall n \geq n_0 .\ c \cdot (n \log n) \leq \log n!)$$

sei n gerade d.h $n = 2k$

Dann: $$n! \geq \underbrace{n \cdot \underbrace{(n-1)}_{\geq \frac{n}{2}} \cdot \underbrace{(n-2)}_{\geq \frac{n}{2}} \cdot \ldots\ldots \cdot \underbrace{\left(n - \frac{n}{2}\right)}_{\geq \frac{n}{2}}}_{\frac{n}{2} \text{ Termen}}$$

$$\geq \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}}$$

$$n! \geq \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}}$$

log ist monoton $\quad x \leq y \longrightarrow \log x \leq \log y$

Also $\log(n!) \geq \log\left(\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}}\right)$

$$= \frac{n}{2} \log \frac{n}{2}$$

$$= \frac{n}{2} \left(\log n - \overbrace{\log 2}^{=1}\right)$$

$$= \frac{n}{2} \log n - \frac{n}{2}$$

$$\geq \frac{1}{4} n \log n$$

$\uparrow c$

<u>Ergo:</u>

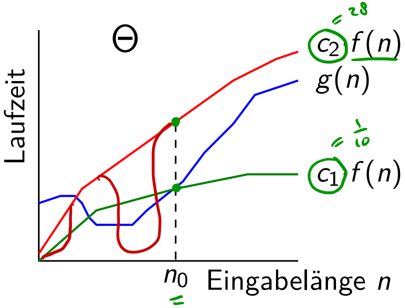
$\log n! \in \Omega(n \log n)$

Die Klasse Groß-Theta (I)

$\Theta(f)$ ist die *Menge* von Funktionen, die genauso schnell wie f wachsen.

- $g \in \Theta(f)$ heißt:
  $c_2 \cdot f(n)$ ist obere Schranke **und**
  $c_1 \cdot f(n)$ ist untere Schranke
  für $g(n)$.

Diese Eigenschaft gilt ab einer Konstanten n_0; Werte unter n_0 werden vernachlässigt.

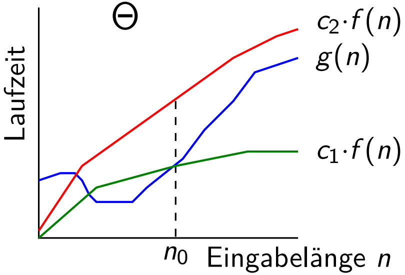


Die Klasse Groß-Theta (I)

$\Theta(f)$ ist die *Menge* von Funktionen, die genauso schnell wie f wachsen.

- $g \in \Theta(f)$ heißt:
  $c_2 \cdot f(n)$ ist obere Schranke **und**
  $c_1 \cdot f(n)$ ist untere Schranke
  für $g(n)$.

Diese Eigenschaft gilt ab einer Konstanten n_0; Werte unter n_0 werden vernachlässigt.



Die Klasse Groß-Theta liefert eine obere und untere Schranke für die Komplexität einer Funktion.

Definition (Die Klasse Groß-Theta)

$g \in \Theta(f)$ gdw. $\exists c_1,\, c_2 > 0,\, n_0$ mit $\forall n \geqslant n_0 : c_1 \cdot f(n) \leqslant g(n) \leqslant c_2 \cdot f(n)$.

Die Klassen O, Ω und Θ

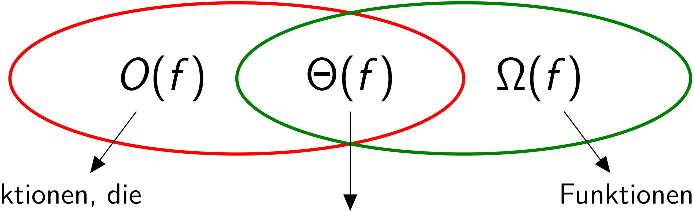
Beziehung zwischen O, Ω und Θ

$g \in \Theta(f)$ gdw. $g \in O(f)$ und $g \in \Omega(f)$.

Die Klassen O, Ω und Θ

Beziehung zwischen O, Ω und Θ

$g \in \Theta(f)$ gdw. $g \in O(f)$ und $g \in \Omega(f)$.



Funktionen, die nicht schneller als f wachsen.

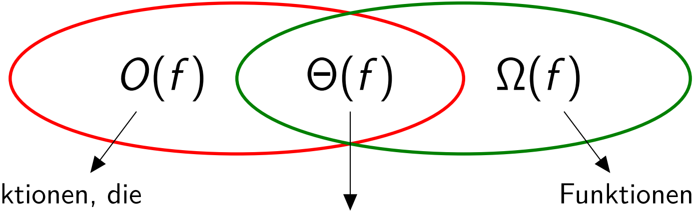
Funktionen, die genauso schnell wie f wachsen.

Funktionen, die nicht langsamer als f wachsen.

Die Klassen O, Ω und Θ

Beziehung zwischen O, Ω und Θ

$g \in \Theta(f)$ gdw. $g \in O(f)$ und $g \in \Omega(f)$.



Funktionen, die nicht schneller als f wachsen.

Funktionen, die genauso schnell wie f wachsen.

Funktionen, die nicht langsamer als f wachsen.

Lemma

$g \in \Theta(f)$ wenn $\lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{g(n)}{f(n)} = c$ für ein $0 < c < \infty$.

Die Klasse Groß-Theta (II)

Definition

$g \in \Theta(f)$ gdw. $\exists c_1,\ c_2 > 0,\ n_0$ mit $\forall n \geqslant n_0 : c_1 \cdot f(n) \leqslant g(n) \leqslant c_2 \cdot f(n)$.

Die Klasse Groß-Theta (II)

Definition

$g \in \Theta(f)$ gdw. $\exists c_1, c_2 > 0, n_0$ mit $\forall n \geqslant n_0 : c_1 \cdot f(n) \leqslant g(n) \leqslant c_2 \cdot f(n)$.

Lemma

$g \in \Theta(f)$ *wenn* $\lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{g(n)}{f(n)} = c$ *für ein* $0 < c < \infty$.

Die Klasse Groß-Theta (II)

Definition

$g \in \Theta(f)$ gdw. $\exists c_1, c_2 > 0, n_0$ mit $\forall n \geqslant n_0 : c_1 \cdot f(n) \leqslant g(n) \leqslant c_2 \cdot f(n)$.

Lemma

$g \in \Theta(f)$ *wenn* $\lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{g(n)}{f(n)} = c$ *für ein* $0 < c < \infty$.

Beispiel

Betrachte $g(n) = 3n^2 + 10n + 6$. Dann ist:

Die Klasse Groß-Theta (II)

$g \in \Theta(f)$ gdw.

1 $(g \in O(f)$ und $g \in \Omega(f))$

Definition

2 $g \in \Theta(f)$ gdw. $\exists c_1, c_2 > 0, n_0$ mit $\forall n \geqslant n_0 : c_1 \cdot f(n) \leqslant g(n) \leqslant c_2 \cdot f(n)$.

Lemma

3 $g \in \Theta(f)$ *wenn* $\lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{g(n)}{f(n)} = c$ *für ein* $0 < c < \infty$.

Beispiel

Betrachte $g(n) = 3n^2 + 10n + 6$. Dann ist:

- $g \notin \Theta(n)$, da zwar $\underline{g \in \Omega(n)}$, aber $\underline{g \notin O(n)}$. nutze 1

Die Klasse Groß-Theta (II)

Definition

$g \in \Theta(f)$ gdw. $\exists c_1, c_2 > 0, n_0$ mit $\forall n \geqslant n_0 : c_1 \cdot f(n) \leqslant g(n) \leqslant c_2 \cdot f(n)$.

Lemma

$g \in \Theta(f)$ *wenn* $\lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{g(n)}{f(n)} = c$ *für ein* $0 < c < \infty$.

3

Beispiel

Betrachte $g(n) = 3n^2 + 10n + 6$. Dann ist:

- $g \notin \Theta(n)$, da zwar $g \in \Omega(n)$, aber $g \notin O(n)$.
- $g \in \Theta(n^2)$, da $\lim_{n \longrightarrow \infty} g(n)/n^2 = 3$.

$\lim_{n \to \infty} \frac{3\cancel{n^2} + \cancel{10n} + \cancel{6}}{\cancel{n^2}}$

Die Klasse Groß-Theta (II)

$g \in \Theta(f)$ gdw.
($g \in O(f)$ und $g \in \Omega(f)$)

Definition

$g \in \Theta(f)$ gdw. $\exists c_1,\ c_2 > 0,\ n_0$ mit $\forall n \geqslant n_0 : c_1 \cdot f(n) \leqslant g(n) \leqslant c_2 \cdot f(n)$.

Lemma

$g \in \Theta(f)$ wenn $\lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{g(n)}{f(n)} = c$ für ein $0 < c < \infty$.

Beispiel

Betrachte $g(n) = 3n^2 + 10n + 6$. Dann ist:

- $g \notin \Theta(n)$, da zwar $g \in \Omega(n)$, aber $g \notin O(n)$.
- $g \in \Theta(n^2)$, da $\lim_{n \longrightarrow \infty} g(n)/n^2 = 3$.
- $g \notin \Theta(n^3)$, da zwar $g \in O(n^3)$, aber $g \notin \Omega(n^3)$.

Beispiel: Fibonacci-Zahlen

Wachstum einer Kaninchenpopulation

- Zu Beginn gibt es ein Paar geschlechtsreifer Kaninchen.
- Jedes neugeborene Paar wird im zweiten Lebensmonat geschlechtsreif.
- Jedes geschlechtsreife Paar wirft pro Monat ein weiteres Paar.
- Sie sterben nie und hören niemals auf.

Beispiel: Fibonacci-Zahlen

Wachstum einer Kaninchenpopulation

- Zu Beginn gibt es ein Paar geschlechtsreifer Kaninchen.
- Jedes neugeborene Paar wird im zweiten Lebensmonat geschlechtsreif.
- Jedes geschlechtsreife Paar wirft pro Monat ein weiteres Paar.
- Sie sterben nie und hören niemals auf.

$$\begin{aligned} \mathit{Fib}(0) = 0 \quad \text{und} \quad \mathit{Fib}(1) &= 1 \\ \mathit{Fib}(n{+}2) = \mathit{Fib}(n{+}1) + \mathit{Fib}(n) & \quad \text{für } n \geqslant 0. \end{aligned}$$

Beispiel: Fibonacci-Zahlen

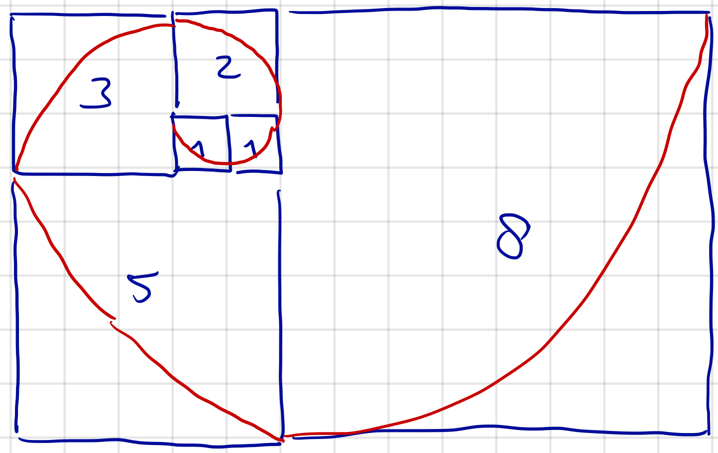
Wachstum einer Kaninchenpopulation

- Zu Beginn gibt es ein Paar geschlechtsreifer Kaninchen.
- Jedes neugeborene Paar wird im zweiten Lebensmonat geschlechtsreif.
- Jedes geschlechtsreife Paar wirft pro Monat ein weiteres Paar.
- Sie sterben nie und hören niemals auf.

$$
\begin{aligned}
Fib(0) = 0 \quad \text{und} \quad Fib(1) &= 1 \\
Fib(n{+}2) = Fib(n{+}1) + Fib(n) & \quad \text{für } n \geqslant 0.
\end{aligned}
$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
$Fib(n)$	0	1	1 +	2	3	5	8	13	21	34	...

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21



Beispiel: Fibonacci-Zahlen

Wachstum einer Kaninchenpopulation

- Zu Beginn gibt es ein Paar geschlechtsreifer Kaninchen.
- Jedes neugeborene Paar wird im zweiten Lebensmonat geschlechtsreif.
- Jedes geschlechtsreife Paar wirft pro Monat ein weiteres Paar.
- Sie sterben nie und hören niemals auf.

$Fib(n) \in \Theta(c^n)$

$$
\begin{aligned}
Fib(0) = 0 \quad \text{und} \quad Fib(1) &= 1 \\
Fib(n{+}2) = Fib(n{+}1) + Fib(n) & \quad \text{für } n \geqslant 0.
\end{aligned}
$$

mit $c = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
$Fib(n)$	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	...

"goldene Schnitt"

$Fib(n) \in O(2^n)$ und $Fib(n) \in \Omega\left(2^{\frac{n}{2}}\right)$

$\frac{13}{8}$ $\frac{21}{13}$ $\frac{34}{21}$

Beh: $f(n) \in O(2^n)$

Bem 1: $f(n) > 0 \quad \forall n > 0$

Bem 2: $f(n) < f(n+1) \quad \forall n > 2$

Abschätzung nach oben:

$\forall n > 3$:

$$f(n) = f(n-1) + f(n-2)$$

$$< \underbrace{f(n-1) + f(n-1)}_{2 \cdot f(n-1)}$$

$$< 4 \cdot f(n-2)$$

$$\dots\dots < 2^{n-1} \cdot f(1) = \overset{c}{\tfrac{1}{2}} 2^n$$

<u>Ergo:</u>

$f(n) \in O(2^n)$

Einige elementare Eigenschaften

Reflexivität

- $f \in O(f)$, $f \in \Omega(f)$, $f \in \Theta(f)$.

Einige elementare Eigenschaften

Reflexivität

- $f \in O(f)$, $f \in \Omega(f)$, $f \in \Theta(f)$.

Transitivität

- Aus $f \in O(g)$ und $g \in O(h)$ folgt $f \in O(h)$.

Einige elementare Eigenschaften

Reflexivität

- $f \in O(f)$, $f \in \Omega(f)$, $f \in \Theta(f)$.

Transitivität

- Aus $f \in O(g)$ und $g \in O(h)$ folgt $f \in O(h)$.
- Aus $f \in \Omega(g)$ und $g \in \Omega(h)$ folgt $f \in \Omega(h)$.

Einige elementare Eigenschaften

Reflexivität

- $f \in O(f)$, $f \in \Omega(f)$, $f \in \Theta(f)$.

Transitivität

- Aus $f \in O(g)$ und $g \in O(h)$ folgt $f \in O(h)$.
- Aus $f \in \Omega(g)$ und $g \in \Omega(h)$ folgt $f \in \Omega(h)$.
- Aus $f \in \Theta(g)$ und $g \in \Theta(h)$ folgt $f \in \Theta(h)$.

Einige elementare Eigenschaften

Reflexivität

- $f \in O(f)$, $f \in \Omega(f)$, $f \in \Theta(f)$.

Transitivität

- Aus $f \in O(g)$ und $g \in O(h)$ folgt $f \in O(h)$.
- Aus $f \in \Omega(g)$ und $g \in \Omega(h)$ folgt $f \in \Omega(h)$.
- Aus $f \in \Theta(g)$ und $g \in \Theta(h)$ folgt $f \in \Theta(h)$.

Symmetrie von Θ

- $f \in \Theta(g)$ gdw. $g \in \Theta(f)$.

Einige elementare Eigenschaften

Reflexivität

- $f \in O(f)$, $f \in \Omega(f)$, $f \in \Theta(f)$.

Transitivität

- Aus $f \in O(g)$ und $g \in O(h)$ folgt $f \in O(h)$.
- Aus $f \in \Omega(g)$ und $g \in \Omega(h)$ folgt $f \in \Omega(h)$.
- Aus $f \in \Theta(g)$ und $g \in \Theta(h)$ folgt $f \in \Theta(h)$.

Symmetrie von Θ

- $f \in \Theta(g)$ gdw. $g \in \Theta(f)$.

$\exists c > 0, n_0 . \forall n \geq n_0 . f \leq c \cdot g$

Beziehung zwischen O und Ω

- $f \in O(g)$ gdw. $g \in \Omega(f)$.

$\frac{1}{c} \cdot f \leq g$

Beispiel

Die folgenden 3 Aussagen sind alle gültig:

(a) $\log_a n \in \Theta(\log_b n)$, (b) $\log_b n \in \Theta(\log_a n)$, (c) $O(\log_a n) = O(\log_b n)$.

Beispiel

Die folgenden 3 Aussagen sind alle gültig:

(a) $\log_a n \in \Theta(\log_b n)$, (b) $\log_b n \in \Theta(\log_a n)$, (c) $\boxed{O(\log_a n) = O(\log_b n)}$.

Beweis.

Wir beweisen (c).

Beispiel

Die folgenden 3 Aussagen sind alle gültig:

(a) $\log_a n \in \Theta(\log_b n)$, (b) $\log_b n \in \Theta(\log_a n)$, (c) $O(\log_a n) = O(\log_b n)$.

Beweis.

Wir beweisen (c). Zu zeigen: $\exists c_1, c_2 > 0$, so dass

$$\underbrace{\log_a n \leqslant c_1 \cdot \log_b n}_{\boxed{\log_a n \in O(\log_b n)}} \quad \text{und} \quad \underbrace{\log_b n \leqslant c_2 \cdot \log_a n}_{\log_b n \in O(\log_a n)}.$$

Beispiel

Die folgenden 3 Aussagen sind alle gültig:

(a) $\log_a n \in \Theta(\log_b n)$, (b) $\log_b n \in \Theta(\log_a n)$, (c) $O(\log_a n) = O(\log_b n)$.

Beweis.

Wir beweisen (c). Zu zeigen: $\exists c_1, c_2 > 0$, so dass

$$\underbrace{\log_a n \leqslant c_1 \cdot \log_b n}_{\log_a n \in O(\log_b n)} \quad \text{und} \quad \underbrace{\log_b n \leqslant c_2 \cdot \log_a n}_{\log_b n \in O(\log_a n)}.$$

$$\text{Dann: } log_a n \leqslant c_1 \cdot \log_b n \Leftrightarrow \log_a n \leqslant c_1 \cdot \frac{\log_a n}{\log_a b} \Leftrightarrow \log_a b \leqslant c_1$$

Beispiel

Die folgenden 3 Aussagen sind alle gültig:

(a) $\log_a n \in \Theta(\log_b n)$, (b) $\log_b n \in \Theta(\log_a n)$, (c) $O(\log_a n) = O(\log_b n)$.

Beweis.

Wir beweisen (c). Zu zeigen: $\exists c_1, c_2 > 0$, so dass

$$\underbrace{\log_a n \leqslant c_1 \cdot \log_b n}_{\log_a n \in O(\log_b n)} \quad \text{und} \quad \underbrace{\log_b n \leqslant c_2 \cdot \log_a n}_{\log_b n \in O(\log_a n)}.$$

$$\text{Dann: } log_a n \leqslant c_1 \cdot \log_b n \;\Leftrightarrow\; \log_a n \leqslant c_1 \cdot \frac{\log_a n}{\log_a b} \;\Leftrightarrow\; \log_a b \leqslant c_1$$

Wähle $c_1 \geqslant \lceil \log_a b \rceil$.

Beispiel

Die folgenden 3 Aussagen sind alle gültig:

(a) $\log_a n \in \Theta(\log_b n)$, (b) $\log_b n \in \Theta(\log_a n)$, (c) $O(\log_a n) = O(\log_b n)$.

Beweis.

Wir beweisen (c). Zu zeigen: $\exists c_1, c_2 > 0$, so dass

$$\underbrace{\log_a n \leqslant c_1 \cdot \log_b n}_{\log_a n \in O(\log_b n)} \quad \text{und} \quad \underbrace{\log_b n \leqslant c_2 \cdot \log_a n}_{\log_b n \in O(\log_a n)}.$$

$$\text{Dann: } log_a n \leqslant c_1 \cdot \log_b n \;\Leftrightarrow\; \log_a n \leqslant c_1 \cdot \frac{\log_a n}{\log_a b} \;\Leftrightarrow\; \log_a b \leqslant c_1$$

Wähle $c_1 \geqslant \lceil \log_a b \rceil$.

Analog erhalten wir $\log_b a \leqslant c_2$; dann wähle $c_2 \geqslant \lceil \log_b a \rceil$.

Beispiel

Die folgenden 3 Aussagen sind alle gültig:

(a) $\log_a n \in \Theta(\log_b n)$, (b) $\log_b n \in \Theta(\log_a n)$, (c) $O(\log_a n) = O(\log_b n)$.

Beweis.

Wir beweisen (c). Zu zeigen: $\exists c_1, c_2 > 0$, so dass

$$\underbrace{\log_a n \leqslant c_1 \cdot \log_b n}_{\log_a n \in O(\log_b n)} \quad \text{und} \quad \underbrace{\log_b n \leqslant c_2 \cdot \log_a n}_{\log_b n \in O(\log_a n)}.$$

$$\text{Dann: } log_a n \leqslant c_1 \cdot \log_b n \;\Leftrightarrow\; \log_a n \leqslant c_1 \cdot \frac{\log_a n}{\log_a b} \;\Leftrightarrow\; \log_a b \leqslant c_1$$

Wähle $c_1 \geqslant \lceil \log_a b \rceil$.

Analog erhalten wir $\log_b a \leqslant c_2$; dann wähle $c_2 \geqslant \lceil \log_b a \rceil$.

Die Aussagen (a) und (b) folgen auf ähnliche Weise. □

Die Klassen Klein-O, Klein-Omega

$o(f)$ ist die *Menge* von Funktionen, die echt langsamer als f wachsen.

Die Klassen Klein-O, Klein-Omega

$o(f)$ ist die *Menge* von Funktionen, die echt langsamer als f wachsen.

Definition

$g \in o(f)$ gdw. $\forall c > 0$, $\exists n_0$ mit $\forall n \geqslant n_0 : 0 \leqslant g(n) < c \cdot f(n)$.

$\omega(f)$ ist die *Menge* von Funktionen, die echt schneller als f wachsen.

Die Klassen Klein-O, Klein-Omega

$o(f)$ ist die *Menge* von Funktionen, die echt langsamer als f wachsen.

Definition

$g \in o(f)$ gdw. $\forall c > 0, \exists n_0$ mit $\forall n \geqslant n_0 : 0 \leqslant g(n) < c \cdot f(n)$.

$\omega(f)$ ist die *Menge* von Funktionen, die echt schneller als f wachsen.

Definition

$g \in \omega(f)$ gdw. $\forall c > 0, \exists n_0$ mit $\forall n \geqslant n_0 : c \cdot f(n) < g(n)$.

Die Klassen Klein-O, Klein-Omega

$o(f)$ ist die *Menge* von Funktionen, die echt langsamer als f wachsen.

Definition

$g \in o(f)$ gdw. $\forall c > 0, \exists n_0$ mit $\forall n \geqslant n_0 : 0 \leqslant g(n) < c \cdot f(n)$.

$\omega(f)$ ist die *Menge* von Funktionen, die echt schneller als f wachsen.

Definition

$g \in \omega(f)$ gdw. $\forall c > 0, \exists n_0$ mit $\forall n \geqslant n_0 : c \cdot f(n) < g(n)$.

Beziehung zwischen o und ω

- $f \in o(g)$ gdw. $g \in \omega(f)$.

Übersicht

Platzkomplexität

Platzkomplexität

Unter der Platzkomplexität eines Problems versteht man den (minimalen) Bedarf an Speicherplatz eines Algorithmus zur Lösung dieses Problems, in Abhängigkeit von der Länge der Eingabe.

Platzkomplexität

Platzkomplexität

Unter der Platzkomplexität eines Problems versteht man den (minimalen) Bedarf an Speicherplatz eines Algorithmus zur Lösung dieses Problems, in Abhängigkeit von der Länge der Eingabe.

Platzkomplexität

- Nicht nur die Zeitkomplexität, sonder auch der Speicherbedarf ist wichtig!

Platzkomplexität

Platzkomplexität

Unter der Platzkomplexität eines Problems versteht man den (minimalen) Bedarf an Speicherplatz eines Algorithmus zur Lösung dieses Problems, in Abhängigkeit von der Länge der Eingabe.

Platzkomplexität

- Nicht nur die Zeitkomplexität, sonder auch der Speicherbedarf ist wichtig!
- Dilemma: Eine Reduktion der Zeitkomplexität führt oft zur Erhöhung der Platzkomplexität, und vice versa.

Platzkomplexität

Platzkomplexität

Unter der Platzkomplexität eines Problems versteht man den (minimalen) Bedarf an Speicherplatz eines Algorithmus zur Lösung dieses Problems, in Abhängigkeit von der Länge der Eingabe.

Platzkomplexität

- Nicht nur die Zeitkomplexität, sonder auch der Speicherbedarf ist wichtig!
- Dilemma: Eine Reduktion der Zeitkomplexität führt oft zur Erhöhung der Platzkomplexität, und vice versa.
- Dies werden wir in später in der DSAL Vorlesung öfters feststellen.

Beispiel: Platzkomplexität von Liedern [Knuth, 1984]

Beispiel

Betrachte eine Lied mit n Wörter, d. h. die Eingabelänge ist n.

Was ist die benötigte Platzkomplexität $S(n)$ um ein Lied der Länge n zu singen?

Beispiel: Platzkomplexität von Liedern [Knuth, 1984]

Beispiel

Betrachte eine Lied mit n Wörter, d. h. die Eingabelänge ist n.

Was ist die benötigte Platzkomplexität $S(n)$ um ein Lied der Länge n zu singen?

Obere und untere Schranken

Beispiel: Platzkomplexität von Liedern [Knuth, 1984]

Beispiel

Betrachte eine Lied mit n Wörter, d. h. die Eingabelänge ist n.

Was ist die benötigte Platzkomplexität $S(n)$ um ein Lied der Länge n zu singen?

Obere und untere Schranken

1. $S(n) \in O(n)$, da höchstens n verschiedene Wörter gespeichert werden müssen.

Beispiel: Platzkomplexität von Liedern [Knuth, 1984]

Beispiel

Betrachte eine Lied mit n Wörter, d. h. die Eingabelänge ist n.

Was ist die benötigte Platzkomplexität $S(n)$ um ein Lied der Länge n zu singen?

Obere und untere Schranken

1. $S(n) \in O(n)$, da höchstens n verschiedene Wörter gespeichert werden müssen.
2. $S(n) \in \Omega(1)$, da wir mindestens eine Sache über das Lied wissen müssen, um es singen zu können.

Beispiel: Platzkomplexität von Liedern [Knuth, 1984]

Beispiel

Betrachte eine Lied mit n Wörter, d. h. die Eingabelänge ist n.

Was ist die benötigte Platzkomplexität $S(n)$ um ein Lied der Länge n zu singen?

Obere und untere Schranken

1. $S(n) \in O(n)$, da höchstens n verschiedene Wörter gespeichert werden müssen.
2. $S(n) \in \Omega(1)$, da wir mindestens eine Sache über das Lied wissen müssen, um es singen zu können.

Kann man die Platzkomplexität durch Refrains ($=$ Kehrverse) reduzieren?

Refrains

Refrain

Die Wiederkehr von textlich/musikalisch (wenigstens überwiegend) identischen Zeilen am Schluss einer Strophe oder zwischen den Strophen.

Refrains

Refrain

Die Wiederkehr von textlich/musikalisch (wenigstens überwiegend) identischen Zeilen am Schluss einer Strophe oder zwischen den Strophen.

Beispiel

Nein man! Ich will noch nicht gehen
Ich will noch ein bisschen Tanzen
Komm schon alter ist doch noch nicht so spät
Lass uns noch ein bisschen tanzen *[Laserkraft 3D]*

Refrains

Refrain

Die Wiederkehr von textlich/musikalisch (wenigstens überwiegend) identischen Zeilen am Schluss einer Strophe oder zwischen den Strophen.

Beispiel

Nein man! Ich will noch nicht gehen
Ich will noch ein bisschen Tanzen
Komm schon alter ist doch noch nicht so spät
Lass uns noch ein bisschen tanzen *[Laserkraft 3D]*

Platzkomplexität

Speichere den Refrain einmal und singe ihn $O(n)$ Mal.

Refrains

Refrain

Die Wiederkehr von textlich/musikalisch (wenigstens überwiegend) identischen Zeilen am Schluss einer Strophe oder zwischen den Strophen.

Beispiel

Nein man! Ich will noch nicht gehen
Ich will noch ein bisschen Tanzen
Komm schon alter ist doch noch nicht so spät
Lass uns noch ein bisschen tanzen *[Laserkraft 3D]*

Platzkomplexität

Speichere den Refrain einmal und singe ihn $O(n)$ Mal.

Dann: $S(n) \in O(n)$,

Refrains

Refrain

Die Wiederkehr von textlich/musikalisch (wenigstens überwiegend) identischen Zeilen am Schluss einer Strophe oder zwischen den Strophen.

Beispiel

Nein man! Ich will noch nicht gehen
Ich will noch ein bisschen Tanzen
Komm schon alter ist doch noch nicht so spät
Lass uns noch ein bisschen tanzen *[Laserkraft 3D]*

Platzkomplexität

Speichere den Refrain einmal und singe ihn $O(n)$ Mal.

Dann: $S(n) \in O(n)$, da die Anzahl der Wörter immer noch $O(n)$ ist;
z. B. bei Strophelänge = Refrainlänge halbiert sich der Speicherbedarf.

Die k Weihnachtstage

Reduktion der Platzkomplexität

Reduziere $S(n)$ durch eine bestimmte, sich ändernde Liedstruktur, etwa:

Die k Weihnachtstage

Reduktion der Platzkomplexität

Reduziere $S(n)$ durch eine bestimmte, sich ändernde Liedstruktur, etwa:

On the kth day of Xmas, my true love gave to me gift$_k$, gift$_{k-1}, \ldots,$ gift$_1$
On the $(k-1)$st day of Xmas, my true love gave to me gift$_{k-1}$, ..., gift$_1$
....
On the first day of Xmas, my true love gave to me a bottle of wine

Die k Weihnachtstage

Reduktion der Platzkomplexität

Reduziere $S(n)$ durch eine bestimmte, sich ändernde Liedstruktur, etwa:

On the kth day of Xmas, my true love gave to me $gift_k$, $gift_{k-1}, \ldots, gift_1$
On the $(k-1)$*st day of Xmas, my true love gave to me* $gift_{k-1}, \ldots, gift_1$
. . . .
On the first day of Xmas, my true love gave to me a bottle of wine

Bekanntere Variante: „Old MacDonald had a farm".

Platzkomplexität

Die benötigte Zeit, um das Lied zu singen ist (betrachte keine Refrains):

$$n = \sum_{i=1}^{k} i = k \cdot \left(\frac{k+1}{2}\right) \in \Theta(k^2)$$

Die k Weihnachtstage

Reduktion der Platzkomplexität

Reduziere $S(n)$ durch eine bestimmte, sich ändernde Liedstruktur, etwa:

On the kth day of Xmas, my true love gave to me $gift_k$, $gift_{k-1}, \ldots, gift_1$
On the $(k-1)$*st day of Xmas, my true love gave to me* $gift_{k-1}, \ldots, gift_1$
. . . .
On the first day of Xmas, my true love gave to me a bottle of wine

Bekanntere Variante: „Old MacDonald had a farm“.

Platzkomplexität

Die benötigte Zeit, um das Lied zu singen ist (betrachte keine Refrains):

$$n = \sum_{i=1}^{k} i = k \cdot \left(\frac{k+1}{2}\right) \in \Theta(k^2)$$

Da $n \in \Theta(k^2)$ folgt $k \in O(\sqrt{n})$, also $S(n) \in O(\sqrt{n})$.

100 Bierflaschen

Eine weitere Vereinfachung

Ein (sehr) langweiliges Lied für lange Autofahrten:

> *n bottles of beer on the wall, n bottles of beer*
> *You take one down and pass it around*
> *n−1 bottles of beer on the ball*
> . . . . *[Andy Kaufman]*

100 Bierflaschen

Eine weitere Vereinfachung

Ein (sehr) langweiliges Lied für lange Autofahrten:

> *n bottles of beer on the wall, n bottles of beer*
> *You take one down and pass it around*
> *$n-1$ bottles of beer on the ball*
> $\cdots\cdots\cdots$ *[Andy Kaufman]*

Platzkomplexität

$S(n) \in O(\log n)$, da nur der Wert von n von Bedeutung ist. Dafür reichen $\log n$ Bits aus.

100 Bierflaschen

Eine weitere Vereinfachung

Ein (sehr) langweiliges Lied für lange Autofahrten:

> *n bottles of beer on the wall, n bottles of beer*
> *You take one down and pass it around*
> *$n-1$ bottles of beer on the ball*
> . . . . *[Andy Kaufman]*

Platzkomplexität

$S(n) \in O(\log n)$, da nur der Wert von n von Bedeutung ist. Dafür reichen $\log n$ Bits aus.

Es geht jedoch noch etwas einfacher, nämlich indem man auf das Zählen verzichtet.

Untere Schranke?

Ein Lied mit $S(n) \in \Theta(1)$

That's the way, uh-huh, uh-huh
I like it, uh-huh, huh
$\cdots\cdots\cdot\cdot$ *[KC & the Sunshine Band, 1977]*

Nächste Vorlesung

Nächste Vorlesung

Montag 23. April, 08:30 (H01). Bis dann!