

# Datenstrukturen und Algorithmen

## Vorlesung 2: Asymptotische Effizienz (K3)

Joost-Pieter Katoen

Lehrstuhl für Informatik 2  
Software Modeling and Verification Group

<https://moves.rwth-aachen.de/teaching/ss-18/dsal/>

20. April 2018

# Übersicht

- 1 Asymptotische Betrachtung
  - Begründung
  - Grenzwerte
- 2 Asymptotische Komplexitätsklassen
  - Die Klasse Groß-O
  - Die Klasse Groß-Omega
  - Die Klasse Groß-Theta
- 3 Platzkomplexität

# Übersicht

- 1 Asymptotische Betrachtung
  - Begründung
  - Grenzwerte
- 2 Asymptotische Komplexitätsklassen
  - Die Klasse Groß-O
  - Die Klasse Groß-Omega
  - Die Klasse Groß-Theta
- 3 Platzkomplexität

# Laufzeit von Algorithmen

## Betrachte

Die Laufzeit eines Algorithmus ist keine Zahl, sondern eine **Funktion**.  
Sie gibt die Laufzeit des Algorithmus für jede Eingabelänge an.

# Laufzeit von Algorithmen

## Betrachte

Die Laufzeit eines Algorithmus ist keine Zahl, sondern eine **Funktion**.  
Sie gibt die Laufzeit des Algorithmus für jede Eingabelänge an.

## Worst-Case Laufzeit

Die **Worst-Case** Laufzeit  $W(n)$  für Eingabelänge  $n$  ist die **längste** Laufzeit aus allen Eingaben mit Länge  $n$ .

# Laufzeit von Algorithmen

## Betrachte

Die Laufzeit eines Algorithmus ist keine Zahl, sondern eine **Funktion**.  
Sie gibt die Laufzeit des Algorithmus für jede Eingabelänge an.

## Worst-Case Laufzeit

Die **Worst-Case** Laufzeit  $W(n)$  für Eingabelänge  $n$  ist die **längste** Laufzeit aus allen Eingaben mit Länge  $n$ .

## Best-Case Laufzeit

Die **Best-Case** Laufzeit  $B(n)$  für Eingabelänge  $n$  ist die **kürzeste** Laufzeit aus allen Eingaben mit Länge  $n$ .

# Asymptotische Betrachtung (I)

Die exakte Bestimmung der Funktionen  $A(n)$ ,  $B(n)$  und  $W(n)$  ist üblicherweise sehr schwierig.

# Asymptotische Betrachtung (I)

Die exakte Bestimmung der Funktionen  $A(n)$ ,  $B(n)$  und  $W(n)$  ist üblicherweise sehr schwierig. Außerdem:



# Asymptotische Betrachtung (I)

Die exakte Bestimmung der Funktionen  $A(n)$ ,  $B(n)$  und  $W(n)$  ist üblicherweise sehr schwierig. Außerdem:

- ▶ ist sie von zweifelhaftem Nutzen für Vergleiche:  
Ist etwa  $W(n) = 1021n$  besser als  $W(n) = \frac{1}{2}n^2$ ?

# Asymptotische Betrachtung (I)

Die exakte Bestimmung der Funktionen  $A(n)$ ,  $B(n)$  und  $W(n)$  ist üblicherweise sehr schwierig. Außerdem:

- ▶ ist sie von zweifelhaftem Nutzen für Vergleiche:  
Ist etwa  $W(n) = 1021n$  besser als  $W(n) = \frac{1}{2}n^2$ ?
- ▶ wollen wir maschinenabhängige Konstanten (z. B. Rechnergeschwindigkeit), Initialisierungsaufwand, usw. ausklammern.

# Asymptotische Betrachtung (I)

Die exakte Bestimmung der Funktionen  $A(n)$ ,  $B(n)$  und  $W(n)$  ist üblicherweise sehr schwierig. Außerdem:

- ▶ ist sie von zweifelhaftem Nutzen für Vergleiche:  
Ist etwa  $W(n) = 1021n$  besser als  $W(n) = \frac{1}{2}n^2$ ?
- ▶ wollen wir maschinenabhängige Konstanten (z. B. Rechengeschwindigkeit), Initialisierungsaufwand, usw. ausklammern.

Daher: Normalerweise keine exakte sondern **asymptotische** Betrachtung.

# Asymptotische Betrachtung (II)

- ▶ Betrachte Wachstum der Laufzeit für  $n \rightarrow \infty$ .

# Asymptotische Betrachtung (II)

- ▶ Betrachte Wachstum der Laufzeit für  $n \rightarrow \infty$ .
- ▶ **Kurze Eingaben** und konstante Faktoren werden vernachlässigt.

# Asymptotische Betrachtung (II)

- ▶ Betrachte Wachstum der Laufzeit für  $n \rightarrow \infty$ .
- ▶ **Kurze Eingaben** und konstante Faktoren werden vernachlässigt.
- ▶ Anschaulich: **Wir lassen Glieder niedriger Ordnung weg**, z. B. :

$$W(n) = 3n^4 + 5n^3 + 10 \in O(n^4)$$

(d. h.  $n^4$  ist dominierender Faktor für  $n \rightarrow \infty$ )

# Asymptotische Betrachtung (II)

- ▶ Betrachte Wachstum der Laufzeit für  $n \rightarrow \infty$ .
- ▶ **Kurze Eingaben** und konstante Faktoren werden vernachlässigt.
- ▶ Anschaulich: **Wir lassen Glieder niedriger Ordnung weg**, z. B. :

$$W(n) = 3n^4 + 5n^3 + 10 \in O(n^4)$$

(d. h.  $n^4$  ist dominierender Faktor für  $n \rightarrow \infty$ )

- ▶ So erhalten wir untere/obere Schranken für  $A(n)$ ,  $B(n)$  und  $W(n)$ !

# Asymptotische Betrachtung (II)

- ▶ Betrachte Wachstum der Laufzeit für  $n \rightarrow \infty$ .
- ▶ **Kurze Eingaben** und konstante Faktoren werden vernachlässigt.
- ▶ Anschaulich: **Wir lassen Glieder niedriger Ordnung weg**, z. B. :

$$W(n) = 3n^4 + 5n^3 + 10 \in O(n^4)$$

(d. h.  $n^4$  ist dominierender Faktor für  $n \rightarrow \infty$ )

- ▶ So erhalten wir untere/obere Schranken für  $A(n)$ ,  $B(n)$  und  $W(n)$ !
- ▶ Mathematische Zutat: **Asymptotische Ordnung von Funktionen**.



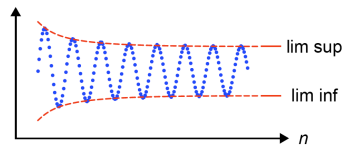
# Grenzwerte

## Limes inferior und Limes superior

Sei  $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$  die Folge  $x_1, x_2, \dots$ . Dann:

$$1. \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \inf_{m \geq n} x_m \right)$$

$$2. \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sup_{m \geq n} x_m \right)$$



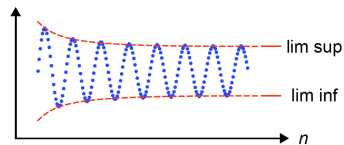
# Grenzwerte

## Limes inferior und Limes superior

Sei  $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$  die Folge  $x_1, x_2, \dots$ . Dann:

$$1. \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \inf_{m \geq n} x_m \right)$$

$$2. \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sup_{m \geq n} x_m \right)$$



## Einige Fakten

$$1. \text{Existieren } \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n \text{ und } \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n: \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

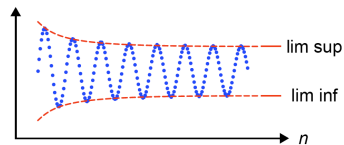
# Grenzwerte

## Limes inferior und Limes superior

Sei  $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$  die Folge  $x_1, x_2, \dots$ . Dann:

$$1. \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \inf_{m \geq n} x_m \right)$$

$$2. \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sup_{m \geq n} x_m \right)$$



## Einige Fakten

- Existieren  $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n$  und  $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$ :  $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$ .
- Existiert  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  dann:  $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ .

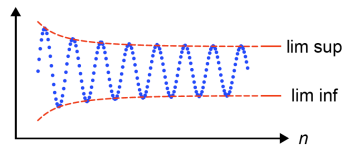
# Grenzwerte

## Limes inferior und Limes superior

Sei  $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$  die Folge  $x_1, x_2, \dots$ . Dann:

$$1. \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \inf_{m \geq n} x_m \right)$$

$$2. \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sup_{m \geq n} x_m \right)$$



## Einige Fakten

$$1. \text{ Existieren } \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n \text{ und } \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n: \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

$$2. \text{ Existiert } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \text{ dann: } \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

Sind  $f, g$  differenzierbar, dann gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g(n)}{f(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g'(n)}{f'(n)}$ . L'Hôpital

# Übersicht

- 1 Asymptotische Betrachtung
  - Begründung
  - Grenzwerte
- 2 Asymptotische Komplexitätsklassen
  - Die Klasse Groß-O
  - Die Klasse Groß-Omega
  - Die Klasse Groß-Theta
- 3 Platzkomplexität

# Die Klasse Groß-O (I)

Seien  $f$  und  $g$  Funktionen von  $\mathbb{N}$  (Eingabelänge) nach  $\mathbb{R}_{\geq 0}$  (Laufzeit) und  $c > 0$ .

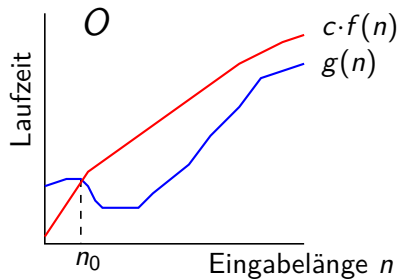
# Die Klasse Groß-O (I)

Seien  $f$  und  $g$  Funktionen von  $\mathbb{N}$  (Eingabelänge) nach  $\mathbb{R}_{\geq 0}$  (Laufzeit) und  $c > 0$ .

$O(f)$  ist die Menge von Funktionen, die **nicht schneller** als  $f$  wachsen.

- ▶  $g \in O(f)$  heißt:  $c \cdot f(n)$  ist **obere** Schranke für  $g(n)$ .

Diese Eigenschaft gilt ab einer Konstanten  $n_0$ ; Werte unter  $n_0$  werden vernachlässigt.



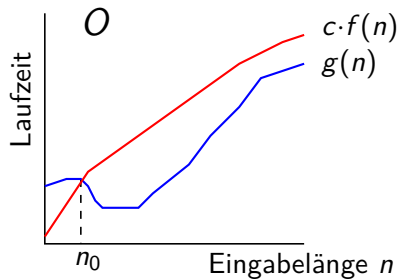
# Die Klasse Groß-O (I)

Seien  $f$  und  $g$  Funktionen von  $\mathbb{N}$  (Eingabelänge) nach  $\mathbb{R}_{\geq 0}$  (Laufzeit) und  $c > 0$ .

$O(f)$  ist die Menge von Funktionen, die **nicht schneller** als  $f$  wachsen.

- ▶  $g \in O(f)$  heißt:  $c \cdot f(n)$  ist **obere** Schranke für  $g(n)$ .

Diese Eigenschaft gilt ab einer Konstanten  $n_0$ ; Werte unter  $n_0$  werden vernachlässigt.



## Definition

$g \in O(f)$  gdw.  $\exists c > 0, n_0$  mit  $\forall n \geq n_0 : 0 \leq g(n) \leq c \cdot f(n)$ .

## Beispiel



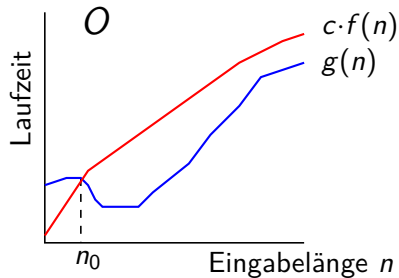
# Die Klasse Groß-O (I)

Seien  $f$  und  $g$  Funktionen von  $\mathbb{N}$  (Eingabelänge) nach  $\mathbb{R}_{\geq 0}$  (Laufzeit) und  $c > 0$ .

$O(f)$  ist die Menge von Funktionen, die **nicht schneller** als  $f$  wachsen.

- ▶  $g \in O(f)$  heißt:  $c \cdot f(n)$  ist **obere** Schranke für  $g(n)$ .

Diese Eigenschaft gilt ab einer Konstanten  $n_0$ ; Werte unter  $n_0$  werden vernachlässigt.



## Definition (alternativ)

$g \in O(f)$  gdw.  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{g(n)}{f(n)} = c \geq 0$  mit  $c \neq \infty$ .

# Die Klasse Groß-O (II)

## Definition (Die Klasse Groß-O)

$g \in O(f)$  gdw.  $\exists c > 0, n_0$  mit  $\forall n \geq n_0 : 0 \leq g(n) \leq c \cdot f(n)$ .

# Die Klasse Groß-O (II)

## Definition (Die Klasse Groß-O)

$g \in O(f)$  gdw.  $\exists c > 0, n_0$  mit  $\forall n \geq n_0 : 0 \leq g(n) \leq c \cdot f(n)$ .

## Definition (alternativ)

$g \in O(f)$  gdw.  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{g(n)}{f(n)} = c \geq 0$  mit  $c \neq \infty$ .

# Die Klasse Groß-O (II)

## Definition (Die Klasse Groß-O)

$g \in O(f)$  gdw.  $\exists c > 0, n_0$  mit  $\forall n \geq n_0 : 0 \leq g(n) \leq c \cdot f(n)$ .

## Definition (alternativ)

$g \in O(f)$  gdw.  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{g(n)}{f(n)} = c \geq 0$  mit  $c \neq \infty$ .

## Theorem

*Es seien  $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  zwei Funktionen. Es sei nur endlich oft  $f(n) = 0$ .  
Dann:*

$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{g(n)}{f(n)}$  existiert gdw.  $\exists c > 0, n_0$  mit  $\forall n \geq n_0 : g(n) \leq c \cdot f(n)$ .

# Die Klasse Groß-O (III)

## Theorem

*Es seien  $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  zwei Funktionen. Es sei nur endlich oft  $f(n) = 0$ .  
Dann existiert  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{g(n)}{f(n)}$  gdw.  $\exists c > 0, n_0. \forall n \geq n_0 : g(n) \leq c \cdot f(n)$ .*

# Die Klasse Groß-O (III)

## Theorem

Es seien  $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  zwei Funktionen. Es sei nur endlich oft  $f(n) = 0$ .  
Dann existiert  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{g(n)}{f(n)}$  gdw.  $\exists c > 0, n_0. \forall n \geq n_0 : g(n) \leq c \cdot f(n)$ .

## Beweis.

„ $\implies$ “:

# Die Klasse Groß-O (III)

## Theorem

Es seien  $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  zwei Funktionen. Es sei nur endlich oft  $f(n) = 0$ .  
Dann existiert  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{g(n)}{f(n)}$  gdw.  $\exists c > 0, n_0. \forall n \geq n_0 : g(n) \leq c \cdot f(n)$ .

## Beweis.

„ $\implies$ “: Sei  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{g(n)}{f(n)} = c < \infty$ .

# Die Klasse Groß-O (III)

## Theorem

Es seien  $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  zwei Funktionen. Es sei nur endlich oft  $f(n) = 0$ .  
Dann existiert  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{g(n)}{f(n)}$  gdw.  $\exists c > 0, n_0. \forall n \geq n_0 : g(n) \leq c \cdot f(n)$ .

## Beweis.

„ $\implies$ “: Sei  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{g(n)}{f(n)} = c < \infty$ . Für  $\varepsilon \geq 0$  es folgt  $c + \varepsilon \geq \frac{g(n)}{f(n)}$   
und  $f(n) \neq 0$  bis auf endlich viele Ausnahmen.



# Die Klasse Groß-O (III)

## Theorem

Es seien  $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  zwei Funktionen. Es sei nur endlich oft  $f(n) = 0$ .  
Dann existiert  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{g(n)}{f(n)}$  gdw.  $\exists c > 0, n_0. \forall n \geq n_0 : g(n) \leq c \cdot f(n)$ .

## Beweis.

„ $\implies$ “: Sei  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{g(n)}{f(n)} = c < \infty$ . Für  $\varepsilon \geq 0$  es folgt  $c + \varepsilon \geq \frac{g(n)}{f(n)}$   
und  $f(n) \neq 0$  bis auf endlich viele Ausnahmen. Ab einem  $n_0 \in \mathbb{N}$  gilt für  
alle  $n \geq n_0$  also:  $c + \varepsilon \geq \frac{g(n)}{f(n)}$ ;

# Die Klasse Groß-O (III)

## Theorem

Es seien  $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  zwei Funktionen. Es sei nur endlich oft  $f(n) = 0$ .  
Dann existiert  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{g(n)}{f(n)}$  gdw.  $\exists c > 0, n_0. \forall n \geq n_0 : g(n) \leq c \cdot f(n)$ .

## Beweis.

„ $\implies$ “: Sei  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{g(n)}{f(n)} = c < \infty$ . Für  $\varepsilon \geq 0$  es folgt  $c + \varepsilon \geq \frac{g(n)}{f(n)}$  und  $f(n) \neq 0$  bis auf endlich viele Ausnahmen. Ab einem  $n_0 \in \mathbb{N}$  gilt für alle  $n \geq n_0$  also:  $c + \varepsilon \geq \frac{g(n)}{f(n)}$ ; und damit:  $g(n) \leq (c + \varepsilon) \cdot f(n)$ .

# Die Klasse Groß-O (III)

## Theorem

Es seien  $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  zwei Funktionen. Es sei nur endlich oft  $f(n) = 0$ .  
Dann existiert  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{g(n)}{f(n)}$  gdw.  $\exists c > 0, n_0. \forall n \geq n_0 : g(n) \leq c \cdot f(n)$ .

## Beweis.

„ $\implies$ “: Sei  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{g(n)}{f(n)} = c < \infty$ . Für  $\varepsilon \geq 0$  es folgt  $c + \varepsilon \geq \frac{g(n)}{f(n)}$  und  $f(n) \neq 0$  bis auf endlich viele Ausnahmen. Ab einem  $n_0 \in \mathbb{N}$  gilt für alle  $n \geq n_0$  also:  $c + \varepsilon \geq \frac{g(n)}{f(n)}$ ; und damit:  $g(n) \leq (c + \varepsilon) \cdot f(n)$ .

„ $\impliedby$ “:

# Die Klasse Groß-O (III)

## Theorem

Es seien  $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  zwei Funktionen. Es sei nur endlich oft  $f(n) = 0$ .  
Dann existiert  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{g(n)}{f(n)}$  gdw.  $\exists c > 0, n_0. \forall n \geq n_0 : g(n) \leq c \cdot f(n)$ .

## Beweis.

„ $\implies$ “: Sei  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{g(n)}{f(n)} = c < \infty$ . Für  $\varepsilon \geq 0$  es folgt  $c + \varepsilon \geq \frac{g(n)}{f(n)}$  und  $f(n) \neq 0$  bis auf endlich viele Ausnahmen. Ab einem  $n_0 \in \mathbb{N}$  gilt für alle  $n \geq n_0$  also:  $c + \varepsilon \geq \frac{g(n)}{f(n)}$ ; und damit:  $g(n) \leq (c + \varepsilon) \cdot f(n)$ .

„ $\impliedby$ “: Gegeben seien nun  $n'_0, c > 0$  so dass  $\forall n \geq n'_0 : g(n) \leq c \cdot f(n)$ .

# Die Klasse Groß-O (III)

## Theorem

Es seien  $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  zwei Funktionen. Es sei nur endlich oft  $f(n) = 0$ . Dann existiert  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{g(n)}{f(n)}$  gdw.  $\exists c > 0, n_0. \forall n \geq n_0 : g(n) \leq c \cdot f(n)$ .

## Beweis.

„ $\implies$ “: Sei  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{g(n)}{f(n)} = c < \infty$ . Für  $\varepsilon \geq 0$  es folgt  $c + \varepsilon \geq \frac{g(n)}{f(n)}$  und  $f(n) \neq 0$  bis auf endlich viele Ausnahmen. Ab einem  $n_0 \in \mathbb{N}$  gilt für alle  $n \geq n_0$  also:  $c + \varepsilon \geq \frac{g(n)}{f(n)}$ ; und damit:  $g(n) \leq (c + \varepsilon) \cdot f(n)$ .

„ $\impliedby$ “: Gegeben seien nun  $n'_0, c > 0$  so dass  $\forall n \geq n'_0 : g(n) \leq c \cdot f(n)$ . Ab einem  $n_0 \geq n'_0$  gilt (wie oben) außerdem  $f(n) \neq 0$  für alle  $n \geq n_0$ .

# Die Klasse Groß-O (III)

## Theorem

Es seien  $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  zwei Funktionen. Es sei nur endlich oft  $f(n) = 0$ .  
 Dann existiert  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{g(n)}{f(n)}$  gdw.  $\exists c > 0, n_0. \forall n \geq n_0 : g(n) \leq c \cdot f(n)$ .

## Beweis.

„ $\implies$ “: Sei  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{g(n)}{f(n)} = c < \infty$ . Für  $\varepsilon \geq 0$  es folgt  $c + \varepsilon \geq \frac{g(n)}{f(n)}$   
 und  $f(n) \neq 0$  bis auf endlich viele Ausnahmen. Ab einem  $n_0 \in \mathbb{N}$  gilt für  
 alle  $n \geq n_0$  also:  $c + \varepsilon \geq \frac{g(n)}{f(n)}$ ; und damit:  $g(n) \leq (c + \varepsilon) \cdot f(n)$ .

„ $\impliedby$ “: Gegeben seien nun  $n'_0, c > 0$  so dass  $\forall n \geq n'_0 : g(n) \leq c \cdot f(n)$ .  
 Ab einem  $n_0 \geq n'_0$  gilt (wie oben) außerdem  $f(n) \neq 0$  für alle  $n \geq n_0$ .  
 Damit ist  $\forall n \geq n_0 : 0 \leq \frac{g(n)}{f(n)} \leq c$ .

# Die Klasse Groß-O (III)

## Theorem

Es seien  $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  zwei Funktionen. Es sei nur endlich oft  $f(n) = 0$ .  
Dann existiert  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{g(n)}{f(n)}$  gdw.  $\exists c > 0, n_0. \forall n \geq n_0 : g(n) \leq c \cdot f(n)$ .

## Beweis.

„ $\implies$ “: Sei  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{g(n)}{f(n)} = c < \infty$ . Für  $\varepsilon \geq 0$  es folgt  $c + \varepsilon \geq \frac{g(n)}{f(n)}$  und  $f(n) \neq 0$  bis auf endlich viele Ausnahmen. Ab einem  $n_0 \in \mathbb{N}$  gilt für alle  $n \geq n_0$  also:  $c + \varepsilon \geq \frac{g(n)}{f(n)}$ ; und damit:  $g(n) \leq (c + \varepsilon) \cdot f(n)$ .

„ $\impliedby$ “: Gegeben seien nun  $n'_0, c > 0$  so dass  $\forall n \geq n'_0 : g(n) \leq c \cdot f(n)$ .  
Ab einem  $n_0 \geq n'_0$  gilt (wie oben) außerdem  $f(n) \neq 0$  für alle  $n \geq n_0$ .  
Damit ist  $\forall n \geq n_0 : 0 \leq \frac{g(n)}{f(n)} \leq c$ .

Die Folge  $a_n = \frac{g(n)}{f(n)}$  ist in  $[0, c]$ , also beschränkt und abgeschlossen.

# Die Klasse Groß-O (III)

## Theorem

Es seien  $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  zwei Funktionen. Es sei nur endlich oft  $f(n) = 0$ .  
 Dann existiert  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{g(n)}{f(n)}$  gdw.  $\exists c > 0, n_0. \forall n \geq n_0 : g(n) \leq c \cdot f(n)$ .

## Beweis.

„ $\implies$ “: Sei  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{g(n)}{f(n)} = c < \infty$ . Für  $\varepsilon \geq 0$  es folgt  $c + \varepsilon \geq \frac{g(n)}{f(n)}$  und  $f(n) \neq 0$  bis auf endlich viele Ausnahmen. Ab einem  $n_0 \in \mathbb{N}$  gilt für alle  $n \geq n_0$  also:  $c + \varepsilon \geq \frac{g(n)}{f(n)}$ ; und damit:  $g(n) \leq (c + \varepsilon) \cdot f(n)$ .

„ $\impliedby$ “: Gegeben seien nun  $n'_0, c > 0$  so dass  $\forall n \geq n'_0 : g(n) \leq c \cdot f(n)$ .  
 Ab einem  $n_0 \geq n'_0$  gilt (wie oben) außerdem  $f(n) \neq 0$  für alle  $n \geq n_0$ .  
 Damit ist  $\forall n \geq n_0 : 0 \leq \frac{g(n)}{f(n)} \leq c$ .

Die Folge  $a_n = \frac{g(n)}{f(n)}$  ist in  $[0, c]$ , also beschränkt und abgeschlossen.  
 Dann existiert  $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n < \infty$ . □



# Die Klasse Groß-O (IV)

## Definition

$g \in O(f)$  gdw.  $\exists c > 0, n_0$  mit  $\forall n \geq n_0 : 0 \leq g(n) \leq c \cdot f(n)$ .

## Definition (alternativ)

$g \in O(f)$  gdw.  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{g(n)}{f(n)} = c \geq 0$  mit  $c \neq \infty$ .

# Die Klasse Groß-O (IV)

## Definition

$g \in O(f)$  gdw.  $\exists c > 0, n_0$  mit  $\forall n \geq n_0 : 0 \leq g(n) \leq c \cdot f(n)$ .

## Definition (alternativ)

$g \in O(f)$  gdw.  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{g(n)}{f(n)} = c \geq 0$  mit  $c \neq \infty$ .

## Beispiel

Betrachte  $g(n) = 3n^2 + 10n + 6$ . Dann ist:

# Die Klasse Groß-O (IV)

## Definition

$g \in O(f)$  gdw.  $\exists c > 0, n_0$  mit  $\forall n \geq n_0 : 0 \leq g(n) \leq c \cdot f(n)$ .

## Definition (alternativ)

$g \in O(f)$  gdw.  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{g(n)}{f(n)} = c \geq 0$  mit  $c \neq \infty$ .

## Beispiel

Betrachte  $g(n) = 3n^2 + 10n + 6$ . Dann ist:

- ▶  $g \notin O(n)$ , da  $\limsup_{n \rightarrow \infty} g(n)/n = \infty$ .

# Die Klasse Groß-O (IV)

## Definition

$g \in O(f)$  gdw.  $\exists c > 0, n_0$  mit  $\forall n \geq n_0 : 0 \leq g(n) \leq c \cdot f(n)$ .

## Definition (alternativ)

$g \in O(f)$  gdw.  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{g(n)}{f(n)} = c \geq 0$  mit  $c \neq \infty$ .

## Beispiel

Betrachte  $g(n) = 3n^2 + 10n + 6$ . Dann ist:

- ▶  $g \notin O(n)$ , da  $\limsup_{n \rightarrow \infty} g(n)/n = \infty$ .
- ▶  $g \in O(n^2)$ , da  $g(n) \leq 20n^2$  für  $n \geq 1$ .

# Die Klasse Groß-O (IV)

## Definition

$g \in O(f)$  gdw.  $\exists c > 0, n_0$  mit  $\forall n \geq n_0 : 0 \leq g(n) \leq c \cdot f(n)$ .

## Definition (alternativ)

$g \in O(f)$  gdw.  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{g(n)}{f(n)} = c \geq 0$  mit  $c \neq \infty$ .

## Beispiel

Betrachte  $g(n) = 3n^2 + 10n + 6$ . Dann ist:

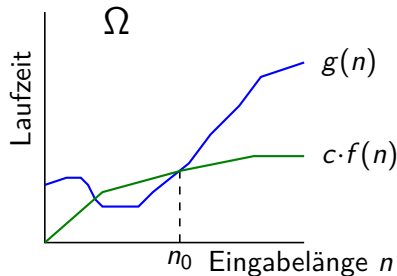
- ▶  $g \notin O(n)$ , da  $\limsup_{n \rightarrow \infty} g(n)/n = \infty$ .
- ▶  $g \in O(n^2)$ , da  $g(n) \leq 20n^2$  für  $n \geq 1$ .
- ▶  $g \in O(n^3)$ , da  $g(n) \leq \frac{1}{10}n^3$  für  $n$  hinreichend groß.

# Die Klasse Groß-Omega (I)

$\Omega(f)$  ist die *Menge* von Funktionen, die **nicht langsamer** als  $f$  wachsen.

- ▶  $g \in \Omega(f)$  heißt:  $c \cdot f(n)$  ist **untere** Schranke für  $g(n)$ .

Diese Eigenschaft gilt ab einer Konstanten  $n_0$ ; Werte unter  $n_0$  werden vernachlässigt.

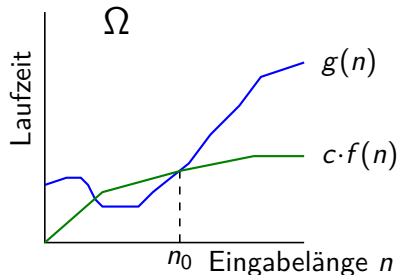


# Die Klasse Groß-Omega (I)

$\Omega(f)$  ist die *Menge* von Funktionen, die **nicht langsamer** als  $f$  wachsen.

- ▶  $g \in \Omega(f)$  heißt:  $c \cdot f(n)$  ist **untere** Schranke für  $g(n)$ .

Diese Eigenschaft gilt ab einer Konstanten  $n_0$ ; Werte unter  $n_0$  werden vernachlässigt.



## Definition

$g \in \Omega(f)$  gdw.  $\exists c > 0, n_0$  mit  $\forall n \geq n_0 : c \cdot f(n) \leq g(n)$ .

## Definition (alternativ)

$g \in \Omega(f)$  gdw.  $\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{g(n)}{f(n)} > 0$ .

# Die Klasse Groß-Omega (II)

## Definition (Die Klasse Groß-Omega)

$g \in \Omega(f)$  gdw.  $\exists c > 0, n_0$  mit  $\forall n \geq n_0 : c \cdot f(n) \leq g(n)$ .



# Die Klasse Groß-Omega (II)

## Definition (Die Klasse Groß-Omega)

$g \in \Omega(f)$  gdw.  $\exists c > 0, n_0$  mit  $\forall n \geq n_0 : c \cdot f(n) \leq g(n)$ .

## Definition (alternativ)

$g \in \Omega(f)$  gdw.  $\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{g(n)}{f(n)} > 0$ .

# Die Klasse Groß-Omega (II)

## Definition (Die Klasse Groß-Omega)

$g \in \Omega(f)$  gdw.  $\exists c > 0, n_0$  mit  $\forall n \geq n_0 : c \cdot f(n) \leq g(n)$ .

## Definition (alternativ)

$g \in \Omega(f)$  gdw.  $\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{g(n)}{f(n)} > 0$ .

## Beispiel

Betrachte  $g(n) = 3n^2 + 10n + 6$ . Dann ist:

# Die Klasse Groß-Omega (II)

## Definition (Die Klasse Groß-Omega)

$g \in \Omega(f)$  gdw.  $\exists c > 0, n_0$  mit  $\forall n \geq n_0 : c \cdot f(n) \leq g(n)$ .

## Definition (alternativ)

$g \in \Omega(f)$  gdw.  $\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{g(n)}{f(n)} > 0$ .

## Beispiel

Betrachte  $g(n) = 3n^2 + 10n + 6$ . Dann ist:

- ▶  $g \in \Omega(n)$ , da  $\liminf_{n \rightarrow \infty} g(n)/n = \infty > 0$ .

# Die Klasse Groß-Omega (II)

## Definition (Die Klasse Groß-Omega)

$g \in \Omega(f)$  gdw.  $\exists c > 0, n_0$  mit  $\forall n \geq n_0 : c \cdot f(n) \leq g(n)$ .

## Definition (alternativ)

$g \in \Omega(f)$  gdw.  $\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{g(n)}{f(n)} > 0$ .

## Beispiel

Betrachte  $g(n) = 3n^2 + 10n + 6$ . Dann ist:

- ▶  $g \in \Omega(n)$ , da  $\liminf_{n \rightarrow \infty} g(n)/n = \infty > 0$ .
- ▶  $g \in \Omega(n^2)$ , da  $\liminf_{n \rightarrow \infty} g(n)/n^2 = 3 > 0$ .

# Die Klasse Groß-Omega (II)

## Definition (Die Klasse Groß-Omega)

$g \in \Omega(f)$  gdw.  $\exists c > 0, n_0$  mit  $\forall n \geq n_0 : c \cdot f(n) \leq g(n)$ .

## Definition (alternativ)

$g \in \Omega(f)$  gdw.  $\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{g(n)}{f(n)} > 0$ .

## Beispiel

Betrachte  $g(n) = 3n^2 + 10n + 6$ . Dann ist:

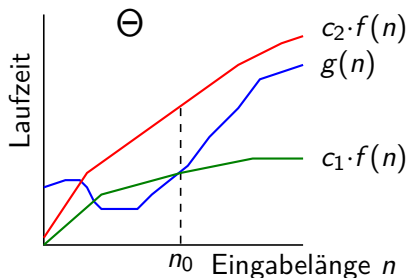
- ▶  $g \in \Omega(n)$ , da  $\liminf_{n \rightarrow \infty} g(n)/n = \infty > 0$ .
- ▶  $g \in \Omega(n^2)$ , da  $\liminf_{n \rightarrow \infty} g(n)/n^2 = 3 > 0$ .
- ▶  $g \notin \Omega(n^3)$ , da  $g(n) \leq 5n^3$  für  $n \geq 2$ .

# Die Klasse Groß-Theta (I)

$\Theta(f)$  ist die *Menge* von Funktionen, die **genauso schnell** wie  $f$  wachsen.

- ▶  $g \in \Theta(f)$  heißt:  
 $c_2 \cdot f(n)$  ist **obere** Schranke **und**  
 $c_1 \cdot f(n)$  ist **untere** Schranke  
 für  $g(n)$ .

Diese Eigenschaft gilt ab einer Konstanten  $n_0$ ; Werte unter  $n_0$  werden vernachlässigt.



# Die Klasse Groß-Theta (I)

$\Theta(f)$  ist die *Menge* von Funktionen, die **genauso schnell** wie  $f$  wachsen.

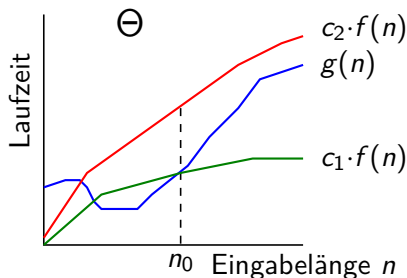
- ▶  $g \in \Theta(f)$  heißt:  
 $c_2 \cdot f(n)$  ist **obere** Schranke **und**  
 $c_1 \cdot f(n)$  ist **untere** Schranke  
 für  $g(n)$ .

Diese Eigenschaft gilt ab einer Konstanten  $n_0$ ; Werte unter  $n_0$  werden vernachlässigt.

Die Klasse Groß-Theta liefert eine **obere** **und** **untere** Schranke für die Komplexität einer Funktion.

## Definition (Die Klasse Groß-Theta)

$g \in \Theta(f)$  gdw.  $\exists c_1, c_2 > 0, n_0$  mit  $\forall n \geq n_0 : c_1 \cdot f(n) \leq g(n) \leq c_2 \cdot f(n)$ .



# Die Klassen $O$ , $\Omega$ und $\Theta$

## Beziehung zwischen $O$ , $\Omega$ und $\Theta$

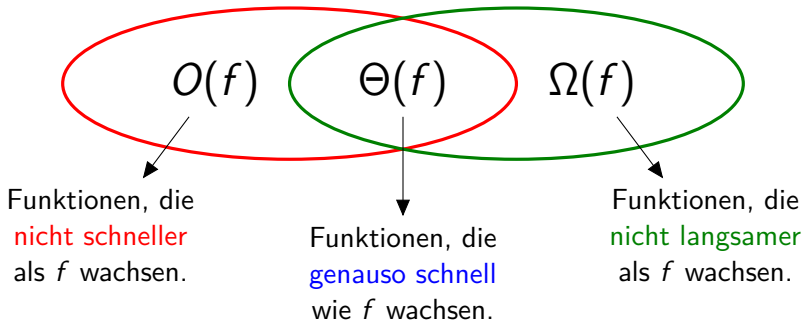
$g \in \Theta(f)$  gdw.  $g \in O(f)$  und  $g \in \Omega(f)$ .



# Die Klassen $O$ , $\Omega$ und $\Theta$

## Beziehung zwischen $O$ , $\Omega$ und $\Theta$

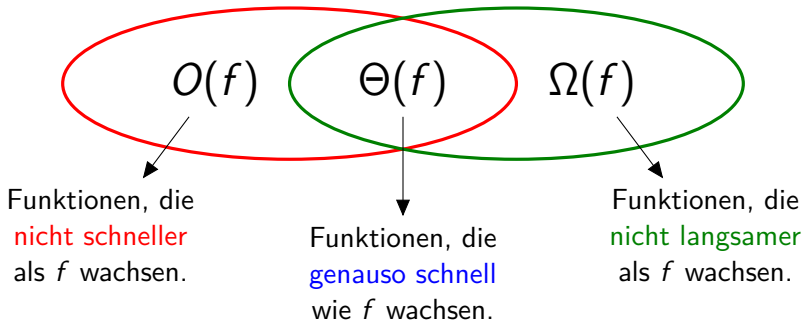
$g \in \Theta(f)$  gdw.  $g \in O(f)$  und  $g \in \Omega(f)$ .



# Die Klassen $O$ , $\Omega$ und $\Theta$

## Beziehung zwischen $O$ , $\Omega$ und $\Theta$

$g \in \Theta(f)$  gdw.  $g \in O(f)$  und  $g \in \Omega(f)$ .



## Lemma

$g \in \Theta(f)$  wenn  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g(n)}{f(n)} = c$  für ein  $0 < c < \infty$ .

# Die Klasse Groß-Theta (II)

## Definition

$g \in \Theta(f)$  gdw.  $\exists c_1, c_2 > 0, n_0$  mit  $\forall n \geq n_0 : c_1 \cdot f(n) \leq g(n) \leq c_2 \cdot f(n)$ .

# Die Klasse Groß-Theta (II)

## Definition

$g \in \Theta(f)$  gdw.  $\exists c_1, c_2 > 0, n_0$  mit  $\forall n \geq n_0 : c_1 \cdot f(n) \leq g(n) \leq c_2 \cdot f(n)$ .

## Lemma

$g \in \Theta(f)$  wenn  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g(n)}{f(n)} = c$  für ein  $0 < c < \infty$ .

# Die Klasse Groß-Theta (II)

## Definition

$g \in \Theta(f)$  gdw.  $\exists c_1, c_2 > 0, n_0$  mit  $\forall n \geq n_0 : c_1 \cdot f(n) \leq g(n) \leq c_2 \cdot f(n)$ .

## Lemma

$g \in \Theta(f)$  wenn  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g(n)}{f(n)} = c$  für ein  $0 < c < \infty$ .

## Beispiel

Betrachte  $g(n) = 3n^2 + 10n + 6$ . Dann ist:

# Die Klasse Groß-Theta (II)

## Definition

$g \in \Theta(f)$  gdw.  $\exists c_1, c_2 > 0, n_0$  mit  $\forall n \geq n_0 : c_1 \cdot f(n) \leq g(n) \leq c_2 \cdot f(n)$ .

## Lemma

$g \in \Theta(f)$  wenn  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g(n)}{f(n)} = c$  für ein  $0 < c < \infty$ .

## Beispiel

Betrachte  $g(n) = 3n^2 + 10n + 6$ . Dann ist:

- ▶  $g \notin \Theta(n)$ , da zwar  $g \in \Omega(n)$ , aber  $g \notin O(n)$ .

# Die Klasse Groß-Theta (II)

## Definition

$g \in \Theta(f)$  gdw.  $\exists c_1, c_2 > 0, n_0$  mit  $\forall n \geq n_0 : c_1 \cdot f(n) \leq g(n) \leq c_2 \cdot f(n)$ .

## Lemma

$g \in \Theta(f)$  wenn  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g(n)}{f(n)} = c$  für ein  $0 < c < \infty$ .

## Beispiel

Betrachte  $g(n) = 3n^2 + 10n + 6$ . Dann ist:

- ▶  $g \notin \Theta(n)$ , da zwar  $g \in \Omega(n)$ , aber  $g \notin O(n)$ .
- ▶  $g \in \Theta(n^2)$ , da  $\lim_{n \rightarrow \infty} g(n)/n^2 = 3$ .

# Die Klasse Groß-Theta (II)

## Definition

$g \in \Theta(f)$  gdw.  $\exists c_1, c_2 > 0, n_0$  mit  $\forall n \geq n_0 : c_1 \cdot f(n) \leq g(n) \leq c_2 \cdot f(n)$ .

## Lemma

$g \in \Theta(f)$  wenn  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g(n)}{f(n)} = c$  für ein  $0 < c < \infty$ .

## Beispiel

Betrachte  $g(n) = 3n^2 + 10n + 6$ . Dann ist:

- ▶  $g \notin \Theta(n)$ , da zwar  $g \in \Omega(n)$ , aber  $g \notin O(n)$ .
- ▶  $g \in \Theta(n^2)$ , da  $\lim_{n \rightarrow \infty} g(n)/n^2 = 3$ .
- ▶  $g \notin \Theta(n^3)$ , da zwar  $g \in O(n^3)$ , aber  $g \notin \Omega(n^3)$ .



# Beispiel: Fibonacci-Zahlen

## Wachstum einer Kaninchenpopulation

- ▶ Zu Beginn gibt es ein Paar geschlechtsreifer Kaninchen.
- ▶ Jedes neugeborene Paar wird im zweiten Lebensmonat geschlechtsreif.
- ▶ Jedes geschlechtsreife Paar wirft pro Monat ein weiteres Paar.
- ▶ Sie sterben nie und hören niemals auf.

# Beispiel: Fibonacci-Zahlen

## Wachstum einer Kaninchenpopulation

- ▶ Zu Beginn gibt es ein Paar geschlechtsreifer Kaninchen.
- ▶ Jedes neugeborene Paar wird im zweiten Lebensmonat geschlechtsreif.
- ▶ Jedes geschlechtsreife Paar wirft pro Monat ein weiteres Paar.
- ▶ Sie sterben nie und hören niemals auf.

$$\begin{aligned} \text{Fib}(0) &= 0 \quad \text{und} \quad \text{Fib}(1) = 1 \\ \text{Fib}(n+2) &= \text{Fib}(n+1) + \text{Fib}(n) \quad \text{für } n \geq 0. \end{aligned}$$

# Beispiel: Fibonacci-Zahlen

## Wachstum einer Kaninchenpopulation

- ▶ Zu Beginn gibt es ein Paar geschlechtsreifer Kaninchen.
- ▶ Jedes neugeborene Paar wird im zweiten Lebensmonat geschlechtsreif.
- ▶ Jedes geschlechtsreife Paar wirft pro Monat ein weiteres Paar.
- ▶ Sie sterben nie und hören niemals auf.

$$Fib(0) = 0 \quad \text{und} \quad Fib(1) = 1$$

$$Fib(n+2) = Fib(n+1) + Fib(n) \quad \text{für } n \geq 0.$$

$n$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
$Fib(n)$	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	...

# Beispiel: Fibonacci-Zahlen

## Wachstum einer Kaninchenpopulation

- ▶ Zu Beginn gibt es ein Paar geschlechtsreifer Kaninchen.
- ▶ Jedes neugeborene Paar wird im zweiten Lebensmonat geschlechtsreif.
- ▶ Jedes geschlechtsreife Paar wirft pro Monat ein weiteres Paar.
- ▶ Sie sterben nie und hören niemals auf.

$$Fib(0) = 0 \quad \text{und} \quad Fib(1) = 1$$

$$Fib(n+2) = Fib(n+1) + Fib(n) \quad \text{für } n \geq 0.$$

$n$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
$Fib(n)$	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	...

$$Fib(n) \in O(2^n) \quad \text{und} \quad Fib(n) \in \Omega\left(2^{\frac{n}{2}}\right)$$

# Einige elementare Eigenschaften

## Reflexivität

- ▶  $f \in O(f)$ ,  $f \in \Omega(f)$ ,  $f \in \Theta(f)$ .

# Einige elementare Eigenschaften

## Reflexivität

- ▶  $f \in O(f)$ ,  $f \in \Omega(f)$ ,  $f \in \Theta(f)$ .

## Transitivität

- ▶ Aus  $f \in O(g)$  und  $g \in O(h)$  folgt  $f \in O(h)$ .

# Einige elementare Eigenschaften

## Reflexivität

- ▶  $f \in O(f)$ ,  $f \in \Omega(f)$ ,  $f \in \Theta(f)$ .

## Transitivität

- ▶ Aus  $f \in O(g)$  und  $g \in O(h)$  folgt  $f \in O(h)$ .
- ▶ Aus  $f \in \Omega(g)$  und  $g \in \Omega(h)$  folgt  $f \in \Omega(h)$ .

# Einige elementare Eigenschaften

## Reflexivität

- ▶  $f \in O(f)$ ,  $f \in \Omega(f)$ ,  $f \in \Theta(f)$ .

## Transitivität

- ▶ Aus  $f \in O(g)$  und  $g \in O(h)$  folgt  $f \in O(h)$ .
- ▶ Aus  $f \in \Omega(g)$  und  $g \in \Omega(h)$  folgt  $f \in \Omega(h)$ .
- ▶ Aus  $f \in \Theta(g)$  und  $g \in \Theta(h)$  folgt  $f \in \Theta(h)$ .



# Einige elementare Eigenschaften

## Reflexivität

- ▶  $f \in O(f)$ ,  $f \in \Omega(f)$ ,  $f \in \Theta(f)$ .

## Transitivität

- ▶ Aus  $f \in O(g)$  und  $g \in O(h)$  folgt  $f \in O(h)$ .
- ▶ Aus  $f \in \Omega(g)$  und  $g \in \Omega(h)$  folgt  $f \in \Omega(h)$ .
- ▶ Aus  $f \in \Theta(g)$  und  $g \in \Theta(h)$  folgt  $f \in \Theta(h)$ .

## Symmetrie von $\Theta$

- ▶  $f \in \Theta(g)$  gdw.  $g \in \Theta(f)$ .

# Einige elementare Eigenschaften

## Reflexivität

- ▶  $f \in O(f)$ ,  $f \in \Omega(f)$ ,  $f \in \Theta(f)$ .

## Transitivität

- ▶ Aus  $f \in O(g)$  und  $g \in O(h)$  folgt  $f \in O(h)$ .
- ▶ Aus  $f \in \Omega(g)$  und  $g \in \Omega(h)$  folgt  $f \in \Omega(h)$ .
- ▶ Aus  $f \in \Theta(g)$  und  $g \in \Theta(h)$  folgt  $f \in \Theta(h)$ .

## Symmetrie von $\Theta$

- ▶  $f \in \Theta(g)$  gdw.  $g \in \Theta(f)$ .

## Beziehung zwischen $O$ und $\Omega$

- ▶  $f \in O(g)$  gdw.  $g \in \Omega(f)$ .

## Beispiel

Die folgenden 3 Aussagen sind alle gültig:

(a)  $\log_a n \in \Theta(\log_b n)$ , (b)  $\log_b n \in \Theta(\log_a n)$ , (c)  $O(\log_a n) = O(\log_b n)$ .

## Beispiel

Die folgenden 3 Aussagen sind alle gültig:

(a)  $\log_a n \in \Theta(\log_b n)$ , (b)  $\log_b n \in \Theta(\log_a n)$ , (c)  $O(\log_a n) = O(\log_b n)$ .

## Beweis.

Wir beweisen (c).

## Beispiel

Die folgenden 3 Aussagen sind alle gültig:

(a)  $\log_a n \in \Theta(\log_b n)$ , (b)  $\log_b n \in \Theta(\log_a n)$ , (c)  $O(\log_a n) = O(\log_b n)$ .

## Beweis.

Wir beweisen (c). Zu zeigen:  $\exists c_1, c_2 > 0$ , so dass

$$\underbrace{\log_a n \leq c_1 \cdot \log_b n}_{\log_a n \in O(\log_b n)} \quad \text{und} \quad \underbrace{\log_b n \leq c_2 \cdot \log_a n}_{\log_b n \in O(\log_a n)}.$$

## Beispiel

Die folgenden 3 Aussagen sind alle gültig:

(a)  $\log_a n \in \Theta(\log_b n)$ , (b)  $\log_b n \in \Theta(\log_a n)$ , (c)  $O(\log_a n) = O(\log_b n)$ .

## Beweis.

Wir beweisen (c). Zu zeigen:  $\exists c_1, c_2 > 0$ , so dass

$$\underbrace{\log_a n \leq c_1 \cdot \log_b n}_{\log_a n \in O(\log_b n)} \quad \text{und} \quad \underbrace{\log_b n \leq c_2 \cdot \log_a n}_{\log_b n \in O(\log_a n)}.$$

$$\text{Dann: } \log_a n \leq c_1 \cdot \log_b n \Leftrightarrow \log_a n \leq c_1 \cdot \frac{\log_a n}{\log_a b} \Leftrightarrow \log_a b \leq c_1$$

## Beispiel

Die folgenden 3 Aussagen sind alle gültig:

(a)  $\log_a n \in \Theta(\log_b n)$ , (b)  $\log_b n \in \Theta(\log_a n)$ , (c)  $O(\log_a n) = O(\log_b n)$ .

## Beweis.

Wir beweisen (c). Zu zeigen:  $\exists c_1, c_2 > 0$ , so dass

$$\underbrace{\log_a n \leq c_1 \cdot \log_b n}_{\log_a n \in O(\log_b n)} \quad \text{und} \quad \underbrace{\log_b n \leq c_2 \cdot \log_a n}_{\log_b n \in O(\log_a n)}.$$

$$\text{Dann: } \log_a n \leq c_1 \cdot \log_b n \Leftrightarrow \log_a n \leq c_1 \cdot \frac{\log_a n}{\log_a b} \Leftrightarrow \log_a b \leq c_1$$

Wähle  $c_1 \geq \lceil \log_a b \rceil$ .

## Beispiel

Die folgenden 3 Aussagen sind alle gültig:

(a)  $\log_a n \in \Theta(\log_b n)$ , (b)  $\log_b n \in \Theta(\log_a n)$ , (c)  $O(\log_a n) = O(\log_b n)$ .

## Beweis.

Wir beweisen (c). Zu zeigen:  $\exists c_1, c_2 > 0$ , so dass

$$\underbrace{\log_a n \leq c_1 \cdot \log_b n}_{\log_a n \in O(\log_b n)} \quad \text{und} \quad \underbrace{\log_b n \leq c_2 \cdot \log_a n}_{\log_b n \in O(\log_a n)}.$$

$$\text{Dann: } \log_a n \leq c_1 \cdot \log_b n \Leftrightarrow \log_a n \leq c_1 \cdot \frac{\log_a n}{\log_a b} \Leftrightarrow \log_a b \leq c_1$$

Wähle  $c_1 \geq \lceil \log_a b \rceil$ .

Analog erhalten wir  $\log_b a \leq c_2$ ; dann wähle  $c_2 \geq \lceil \log_b a \rceil$ .



## Beispiel

Die folgenden 3 Aussagen sind alle gültig:

(a)  $\log_a n \in \Theta(\log_b n)$ , (b)  $\log_b n \in \Theta(\log_a n)$ , (c)  $O(\log_a n) = O(\log_b n)$ .

## Beweis.

Wir beweisen (c). Zu zeigen:  $\exists c_1, c_2 > 0$ , so dass

$$\underbrace{\log_a n \leq c_1 \cdot \log_b n}_{\log_a n \in O(\log_b n)} \quad \text{und} \quad \underbrace{\log_b n \leq c_2 \cdot \log_a n}_{\log_b n \in O(\log_a n)}.$$

$$\text{Dann: } \log_a n \leq c_1 \cdot \log_b n \Leftrightarrow \log_a n \leq c_1 \cdot \frac{\log_a n}{\log_a b} \Leftrightarrow \log_a b \leq c_1$$

Wähle  $c_1 \geq \lceil \log_a b \rceil$ .

Analog erhalten wir  $\log_b a \leq c_2$ ; dann wähle  $c_2 \geq \lceil \log_b a \rceil$ .

Die Aussagen (a) und (b) folgen auf ähnliche Weise. □

# Die Klassen Klein-O, Klein-Omega

$o(f)$  ist die *Menge* von Funktionen, die **echt langsamer** als  $f$  wachsen.

# Die Klassen Klein-O, Klein-Omega

$o(f)$  ist die *Menge* von Funktionen, die **echt langsamer** als  $f$  wachsen.

## Definition

$g \in o(f)$  gdw.  $\forall c > 0, \exists n_0$  mit  $\forall n \geq n_0 : 0 \leq g(n) < c \cdot f(n)$ .

$\omega(f)$  ist die *Menge* von Funktionen, die **echt schneller** als  $f$  wachsen.

# Die Klassen Klein-O, Klein-Omega

$o(f)$  ist die *Menge* von Funktionen, die **echt langsamer** als  $f$  wachsen.

## Definition

$g \in o(f)$  gdw.  $\forall c > 0, \exists n_0$  mit  $\forall n \geq n_0 : 0 \leq g(n) < c \cdot f(n)$ .

$\omega(f)$  ist die *Menge* von Funktionen, die **echt schneller** als  $f$  wachsen.

## Definition

$g \in \omega(f)$  gdw.  $\forall c > 0, \exists n_0$  mit  $\forall n \geq n_0 : c \cdot f(n) < g(n)$ .

# Die Klassen Klein-O, Klein-Omega

$o(f)$  ist die *Menge* von Funktionen, die **echt langsamer** als  $f$  wachsen.

## Definition

$g \in o(f)$  gdw.  $\forall c > 0, \exists n_0$  mit  $\forall n \geq n_0 : 0 \leq g(n) < c \cdot f(n)$ .

$\omega(f)$  ist die *Menge* von Funktionen, die **echt schneller** als  $f$  wachsen.

## Definition

$g \in \omega(f)$  gdw.  $\forall c > 0, \exists n_0$  mit  $\forall n \geq n_0 : c \cdot f(n) < g(n)$ .

## Beziehung zwischen $o$ und $\omega$

- ▶  $f \in o(g)$  gdw.  $g \in \omega(f)$ .

# Übersicht

- 1 Asymptotische Betrachtung
  - Begründung
  - Grenzwerte
- 2 Asymptotische Komplexitätsklassen
  - Die Klasse Groß-O
  - Die Klasse Groß-Omega
  - Die Klasse Groß-Theta
- 3 Platzkomplexität

# Platzkomplexität

## Platzkomplexität

Unter der Platzkomplexität eines Problems versteht man den (minimalen) Bedarf an **Speicherplatz** eines Algorithmus zur Lösung dieses Problems, in Abhängigkeit von der Länge der Eingabe.

# Platzkomplexität

## Platzkomplexität

Unter der Platzkomplexität eines Problems versteht man den (minimalen) Bedarf an **Speicherplatz** eines Algorithmus zur Lösung dieses Problems, in Abhängigkeit von der Länge der Eingabe.

## Platzkomplexität

- ▶ Nicht nur die Zeitkomplexität, sondern auch der **Speicherbedarf** ist wichtig!



# Platzkomplexität

## Platzkomplexität

Unter der Platzkomplexität eines Problems versteht man den (minimalen) Bedarf an **Speicherplatz** eines Algorithmus zur Lösung dieses Problems, in Abhängigkeit von der Länge der Eingabe.

## Platzkomplexität

- ▶ Nicht nur die Zeitkomplexität, sondern auch der **Speicherbedarf** ist wichtig!
- ▶ Dilemma: Eine Reduktion der Zeitkomplexität führt oft zur Erhöhung der Platzkomplexität, und vice versa.

# Platzkomplexität

## Platzkomplexität

Unter der Platzkomplexität eines Problems versteht man den (minimalen) Bedarf an **Speicherplatz** eines Algorithmus zur Lösung dieses Problems, in Abhängigkeit von der Länge der Eingabe.

## Platzkomplexität

- ▶ Nicht nur die Zeitkomplexität, sondern auch der **Speicherbedarf** ist wichtig!
- ▶ Dilemma: Eine Reduktion der Zeitkomplexität führt oft zur Erhöhung der Platzkomplexität, und vice versa.
- ▶ Dies werden wir in später in der DSAL Vorlesung öfters feststellen.

# Beispiel: Platzkomplexität von Liedern [Knuth, 1984]

## Beispiel

Betrachte eine Lied mit  $n$  Wörter, d. h. die Eingabelänge ist  $n$ .

Was ist die benötigte Platzkomplexität  $S(n)$  um ein Lied der Länge  $n$  zu singen?

# Beispiel: Platzkomplexität von Liedern [Knuth, 1984]

## Beispiel

Betrachte eine Lied mit  $n$  Wörter, d. h. die Eingabelänge ist  $n$ .

Was ist die benötigte Platzkomplexität  $S(n)$  um ein Lied der Länge  $n$  zu singen?

## Obere und untere Schranken

# Beispiel: Platzkomplexität von Liedern [Knuth, 1984]

## Beispiel

Betrachte eine Lied mit  $n$  Wörter, d. h. die Eingabelänge ist  $n$ .

Was ist die benötigte Platzkomplexität  $S(n)$  um ein Lied der Länge  $n$  zu singen?

## Obere und untere Schranken

1.  $S(n) \in O(n)$ , da höchstens  $n$  verschiedene Wörter gespeichert werden müssen.

# Beispiel: Platzkomplexität von Liedern [Knuth, 1984]

## Beispiel

Betrachte eine Lied mit  $n$  Wörter, d. h. die Eingabelänge ist  $n$ .

Was ist die benötigte Platzkomplexität  $S(n)$  um ein Lied der Länge  $n$  zu singen?

## Obere und untere Schranken

1.  $S(n) \in O(n)$ , da höchstens  $n$  verschiedene Wörter gespeichert werden müssen.
2.  $S(n) \in \Omega(1)$ , da wir mindestens eine Sache über das Lied wissen müssen, um es singen zu können.

# Beispiel: Platzkomplexität von Liedern [Knuth, 1984]

## Beispiel

Betrachte eine Lied mit  $n$  Wörter, d. h. die Eingabelänge ist  $n$ .

Was ist die benötigte Platzkomplexität  $S(n)$  um ein Lied der Länge  $n$  zu singen?

## Obere und untere Schranken

1.  $S(n) \in O(n)$ , da höchstens  $n$  verschiedene Wörter gespeichert werden müssen.
2.  $S(n) \in \Omega(1)$ , da wir mindestens eine Sache über das Lied wissen müssen, um es singen zu können.

Kann man die Platzkomplexität durch **Refrains** (= Kehrverse) reduzieren?

# Refrains

## Refrain

Die Wiederkehr von textlich/musikalisch (wenigstens überwiegend) identischen Zeilen am Schluss einer Strophe oder zwischen den Strophen.



# Refrains

## Refrain

Die Wiederkehr von textlich/musikalisch (wenigstens überwiegend) identischen Zeilen am Schluss einer Strophe oder zwischen den Strophen.

## Beispiel

*Nein man! Ich will noch nicht gehen  
Ich will noch ein bisschen Tanzen  
Komm schon alter ist doch noch nicht so spät  
Lass uns noch ein bisschen tanzen*

*[Laserkraft 3D]*

# Refrains

## Refrain

Die Wiederkehr von textlich/musikalisch (wenigstens überwiegend) identischen Zeilen am Schluss einer Strophe oder zwischen den Strophen.

## Beispiel

*Nein man! Ich will noch nicht gehen  
Ich will noch ein bisschen Tanzen  
Komm schon alter ist doch noch nicht so spät  
Lass uns noch ein bisschen tanzen*

*[Laserkraft 3D]*

## Platzkomplexität

Speichere den Refrain einmal und singe ihn  $O(n)$  Mal.

# Refrains

## Refrain

Die Wiederkehr von textlich/musikalisch (wenigstens überwiegend) identischen Zeilen am Schluss einer Strophe oder zwischen den Strophen.

## Beispiel

*Nein man! Ich will noch nicht gehen  
Ich will noch ein bisschen Tanzen  
Komm schon alter ist doch noch nicht so spät  
Lass uns noch ein bisschen tanzen*

[Laserkraft 3D]

## Platzkomplexität

Speichere den Refrain einmal und singe ihn  $O(n)$  Mal.

Dann:  $S(n) \in O(n)$ ,

# Refrains

## Refrain

Die Wiederkehr von textlich/musikalisch (wenigstens überwiegend) identischen Zeilen am Schluss einer Strophe oder zwischen den Strophen.

## Beispiel

*Nein man! Ich will noch nicht gehen  
Ich will noch ein bisschen Tanzen  
Komm schon alter ist doch noch nicht so spät  
Lass uns noch ein bisschen tanzen*

[Laserkraft 3D]

## Platzkomplexität

Speichere den Refrain einmal und singe ihn  $O(n)$  Mal.

Dann:  $S(n) \in O(n)$ , da die Anzahl der Wörter immer noch  $O(n)$  ist;  
z. B. bei Strophelänge = Refrainlänge halbiert sich der Speicherbedarf.

# Die $k$ Weihnachtstage

## Reduktion der Platzkomplexität

Reduziere  $S(n)$  durch eine bestimmte, sich ändernde Liedstruktur, etwa:

# Die $k$ Weihnachtstage

## Reduktion der Platzkomplexität

Reduziere  $S(n)$  durch eine bestimmte, sich ändernde Liedstruktur, etwa:

*On the  $k$ th day of Xmas, my true love gave to me  $gift_k, gift_{k-1}, \dots, gift_1$*

*On the  $(k-1)$ st day of Xmas, my true love gave to me  $gift_{k-1}, \dots, gift_1$*

.....

*On the first day of Xmas, my true love gave to me a bottle of wine*

# Die $k$ Weihnachtstage

## Reduktion der Platzkomplexität

Reduziere  $S(n)$  durch eine bestimmte, sich ändernde Liedstruktur, etwa:

*On the  $k$ th day of Xmas, my true love gave to me gift $_k$ , gift $_{k-1}$ , ..., gift $_1$*

*On the  $(k-1)$ st day of Xmas, my true love gave to me gift $_{k-1}$ , ..., gift $_1$*

.....

*On the first day of Xmas, my true love gave to me a bottle of wine*

Bekanntere Variante: „Old MacDonald had a farm“.

## Platzkomplexität

Die benötigte Zeit, um das Lied zu singen ist (betrachte keine Refrains):

$$n = \sum_{i=1}^k i = k \cdot \left( \frac{k+1}{2} \right) \in \Theta(k^2)$$

# Die $k$ Weihnachtstage

## Reduktion der Platzkomplexität

Reduziere  $S(n)$  durch eine bestimmte, sich ändernde Liedstruktur, etwa:

*On the  $k$ th day of Xmas, my true love gave to me gift $_k$ , gift $_{k-1}$ , ..., gift $_1$*

*On the  $(k-1)$ st day of Xmas, my true love gave to me gift $_{k-1}$ , ..., gift $_1$*

.....

*On the first day of Xmas, my true love gave to me a bottle of wine*

Bekanntere Variante: „Old MacDonald had a farm“.

## Platzkomplexität

Die benötigte Zeit, um das Lied zu singen ist (betrachte keine Refrains):

$$n = \sum_{i=1}^k i = k \cdot \left( \frac{k+1}{2} \right) \in \Theta(k^2)$$

Da  $n \in \Theta(k^2)$  folgt  $k \in O(\sqrt{n})$ , also  $S(n) \in O(\sqrt{n})$ .



# 100 Bierflaschen

## Eine weitere Vereinfachung

Ein (sehr) langweiliges Lied für lange Autofahrten:

*n bottles of beer on the wall, n bottles of beer*

*You take one down and pass it around*

*n-1 bottles of beer on the wall*

.....

*[Andy Kaufman]*

# 100 Bierflaschen

## Eine weitere Vereinfachung

Ein (sehr) langweiliges Lied für lange Autofahrten:

*n bottles of beer on the wall, n bottles of beer*

*You take one down and pass it around*

*n-1 bottles of beer on the wall*

.....

*[Andy Kaufman]*

## Platzkomplexität

$S(n) \in O(\log n)$ , da nur der Wert von  $n$  von Bedeutung ist. Dafür reichen  $\log n$  Bits aus.

# 100 Bierflaschen

## Eine weitere Vereinfachung

Ein (sehr) langweiliges Lied für lange Autofahrten:

*n bottles of beer on the wall, n bottles of beer  
You take one down and pass it around  
n-1 bottles of beer on the wall  
.....*

*[Andy Kaufman]*

## Platzkomplexität

$S(n) \in O(\log n)$ , da nur der Wert von  $n$  von Bedeutung ist. Dafür reichen  $\log n$  Bits aus.

Es geht jedoch noch etwas einfacher, nämlich indem man auf das Zählen verzichtet.

# Untere Schranke?

Ein Lied mit  $S(n) \in \Theta(1)$

*That's the way, uh-huh, uh-huh*  
*I like it, uh-huh, huh*  
.....

*[KC & the Sunshine Band, 1977]*

# Nächste Vorlesung

## Nächste Vorlesung

Montag 23. April, 08:30 (H01). Bis dann!