Datenstrukturen und Algorithmen

Vorlesung 18: Maximaler Fluss (K26)

Joost-Pieter Katoen

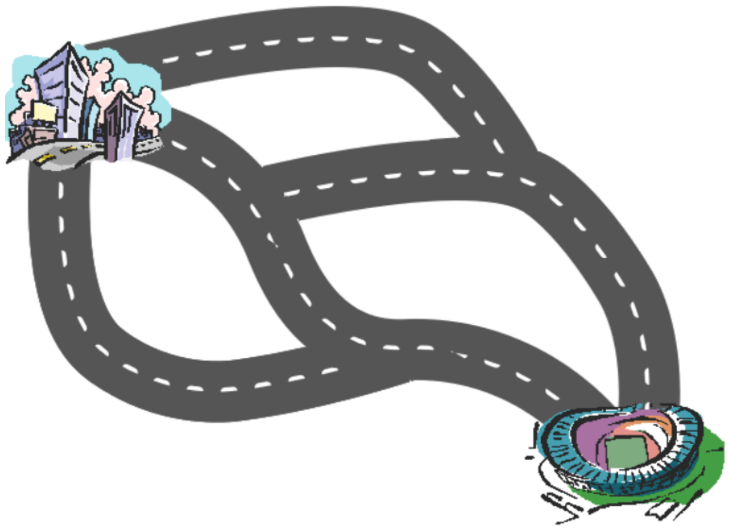
Lehrstuhl für Informatik 2
Software Modeling and Verification Group

http://moves.rwth-aachen.de/teaching/ss-15/dsal/

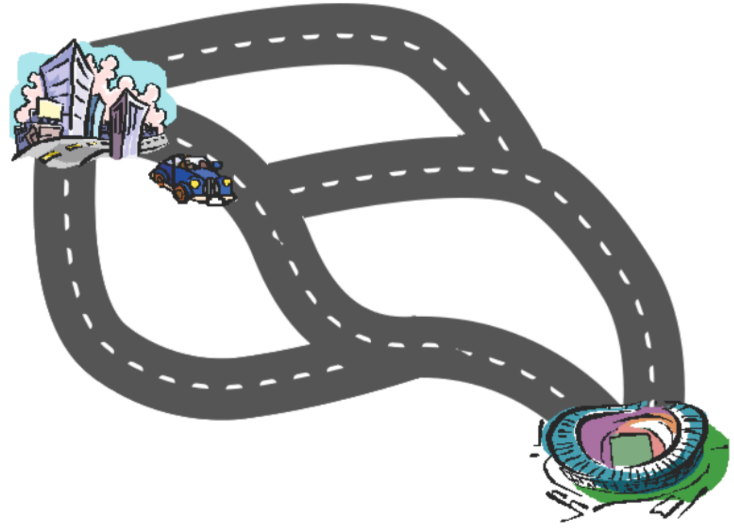
25. Juni 2015

Übersicht

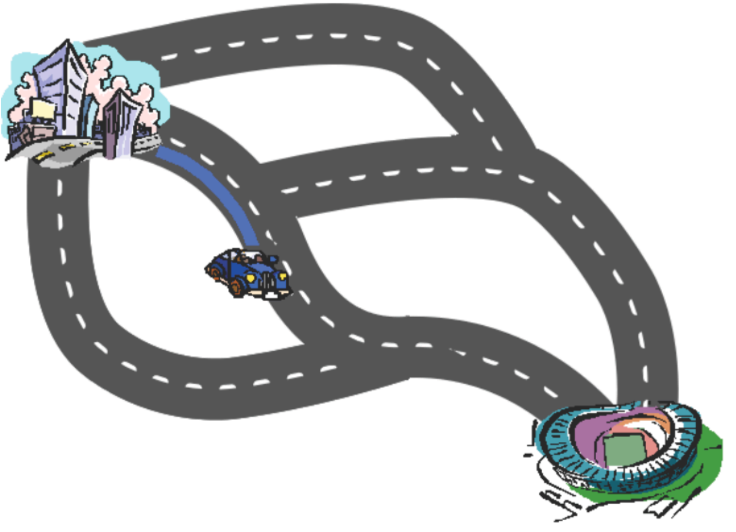
Graphenproblem: maximale Flüsse



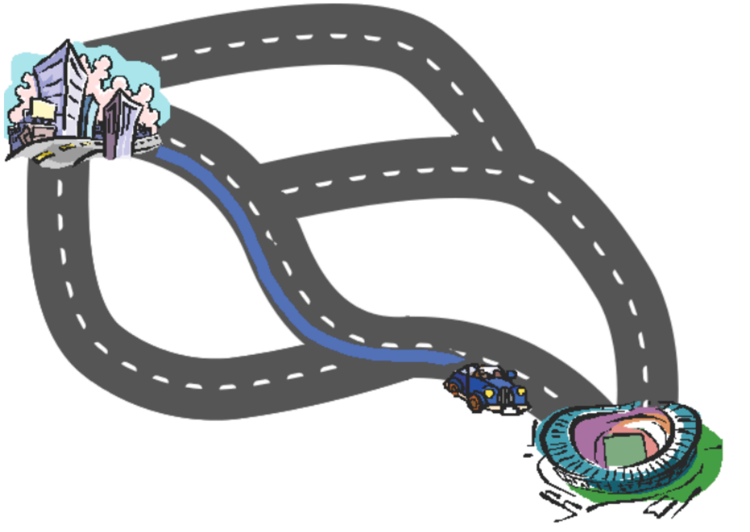
Graphenproblem: maximale Flüsse



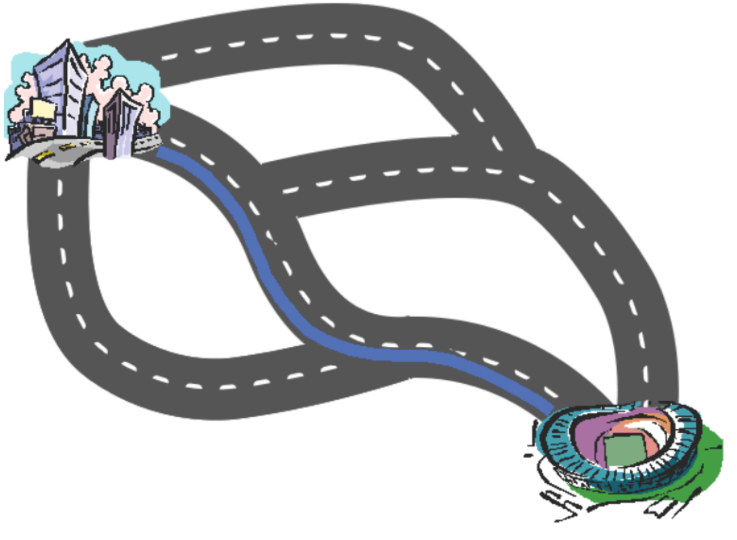
Graphenproblem: maximale Flüsse



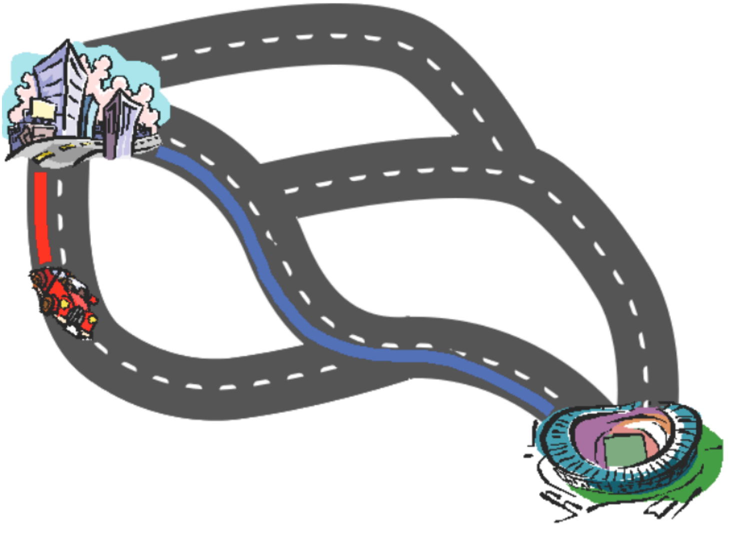
Graphenproblem: maximale Flüsse



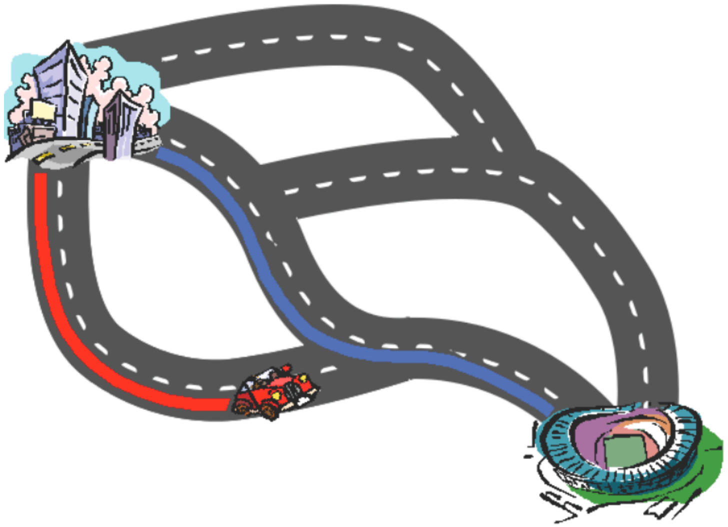
Graphenproblem: maximale Flüsse



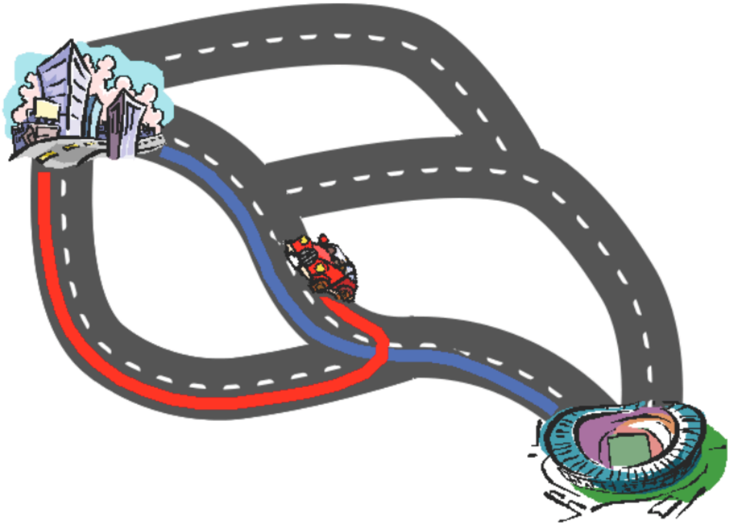
Graphenproblem: maximale Flüsse



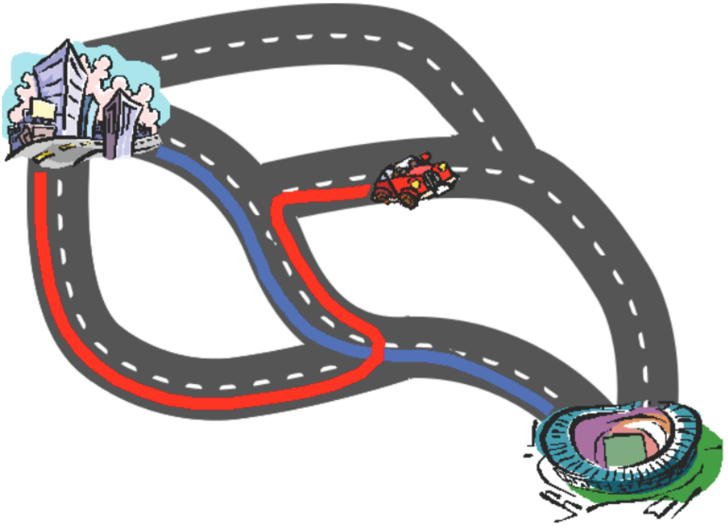
Graphenproblem: maximale Flüsse



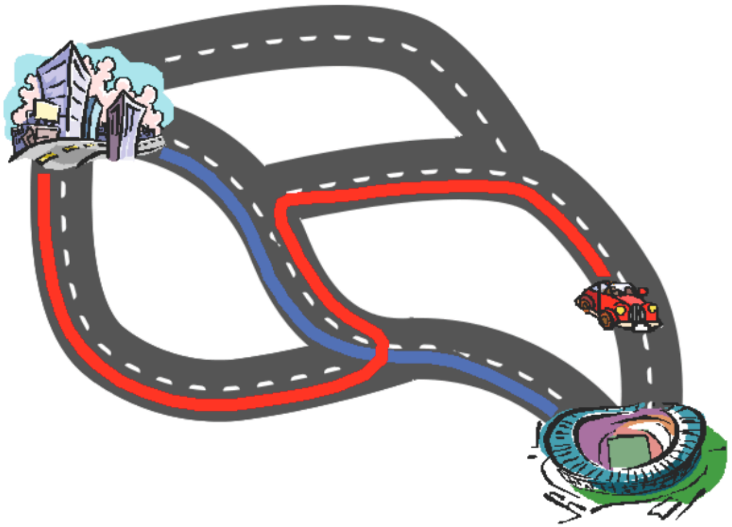
Graphenproblem: maximale Flüsse



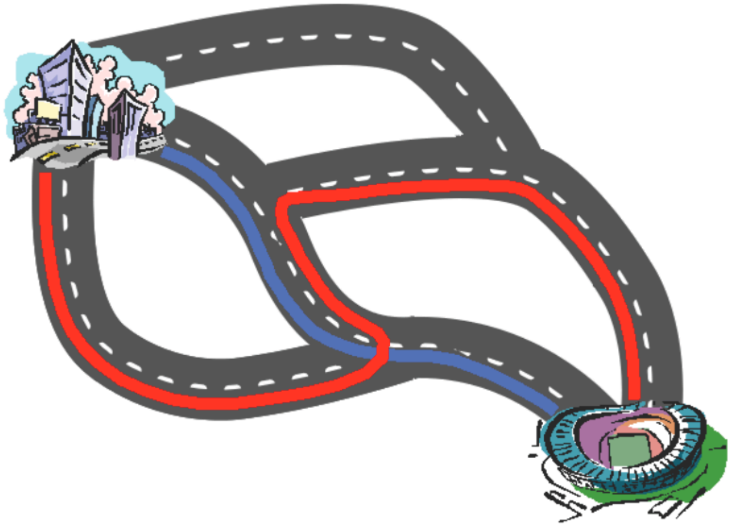
Graphenproblem: maximale Flüsse



Graphenproblem: maximale Flüsse



Graphenproblem: maximale Flüsse



Graphenproblem: maximale Flüsse

Beispiel (maximale Flüsse)

Eingabe:
1. Eine Straßenkarte, auf der die Kapazität der Straßen eingezeichnet ist,
2. eine Quelle, und
3. eine Senke.

Ausgabe: Die maximale Rate, mit der Material (= Zuschauer) von der Quelle bis zur Senke (= Stadion) transportiert werden kann, ohne die Kapazitätsbeschränkungen der Straßen zu verletzen.

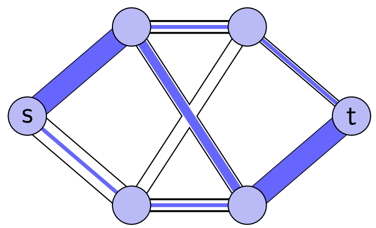
Übersicht

Flussnetzwerk

Flussnetzwerk

Ein Flussnetzwerk $G = (V, E, c)$ ist ein digraph (V, E) mit

- $c : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ die Kapazitätsfunktion sodaß:
  - $(u, v) \in E$ dann $c(u, v) \geqslant 0$
  - $(u, v) \notin E$ dann $c(u, v) = 0$
- $s, t \in V$, die Quelle s und Senke t des Flussnetzwerkes
- Jeder Knoten $v \in V$ liegt auf einem Pfad von Quelle s zur Senke t



- An der Quelle wird produziert
- An der Senke wird verbraucht
- Kanten sind wie Wasserrohre
- Kapazität = maximale Durchsatzrate

Fluss in einem Flussnetzwerk

Definition (Fluss)

Ein Fluss ist eine Funktion $f\colon V \times V \to \mathbb{R}$, mit folgenden Eigenschaften:

Beschränkung: Für $u, v \in V$ gilt $f(u,v) \leqslant c(u,v)$.

Asymmetrie: Für $u, v \in V$ gilt $f(u,v) = -f(v,u)$.

Flusserhaltung: Für $u \in V \setminus \{s,t\}$ gilt: $\sum_{v \in V} f(u,v) = 0$.

$f(u,v)$ ist der Fluss vom Knoten u zum Knoten v.

- Der Fluss zwischen zwei Knoten darf die Kapazitätsbeschränkung nicht überschreiten
- Der Fluss von u nach v ist der negative Wert des Flusses von v nach u
- Gesamte positive Fluss in einen Knoten = gesamte positive Fluss aus dem Knoten (wie im Kirchhoffschen Knotenregel für Strom)

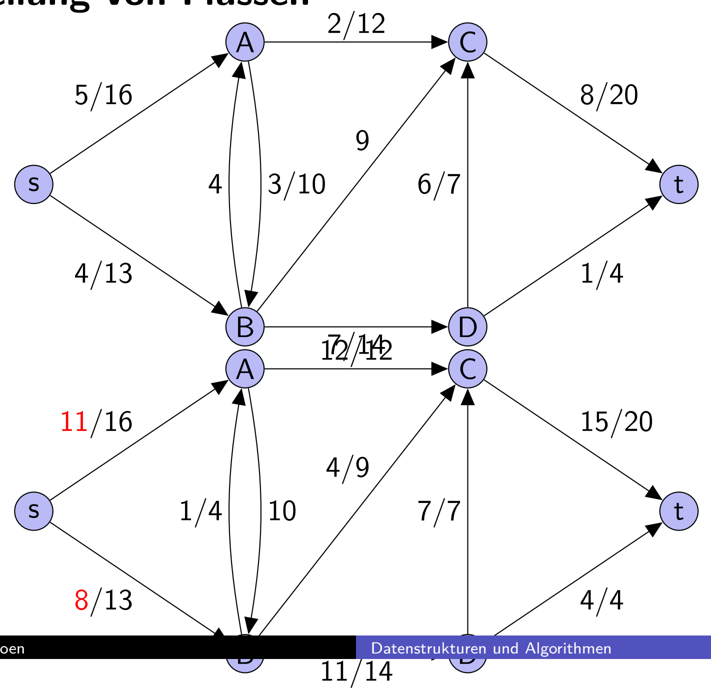
Wert eines Flusses

Definition (Wert eines Flusses)

Der Wert $|f|$ des Flusses f ist der Gesamtfluss aus der Quelle s:

$$|f| = \sum_{v \in V} f(s,v).$$

Darstellung von Flüssen



Maximale Flüsse

Ein maximaler Fluss ist einen Fluss mit maximalem Wert.

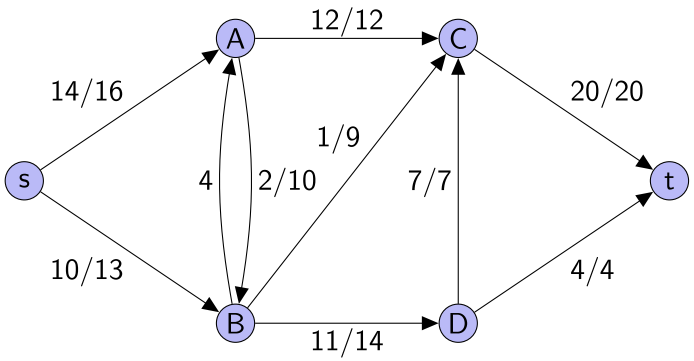
Problem (Maximaler Fluss)

Finde einen maximalen Fluss in einem gegebenen Flussnetzwerk G.

Beispiel (Anwendungen)

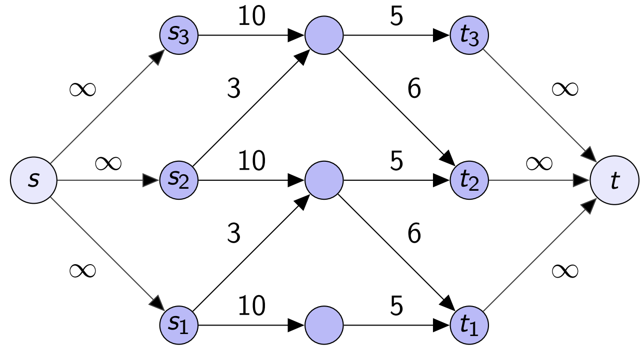
- Wie groß ist der maximale Datendurchsatz zwischen zwei Computern in einem Netzwerk?
- Wie kann der Verkehr in einem Straßennetz so geleitet werden, dass möglichst viele Autos in einer gegeben Zeitspanne ein Ziel erreichen?
- Wie viele Leitungen müssen zerstört sein, damit zwei Computer nicht mehr miteinander kommunizieren können?
- Wie stark sind zwei Gruppen von Facebook-Nutzer miteinander vernetzt?

Ein maximaler Fluss



- Ein maximaler Fluss in diesem Beispiel hat den Wert $|f| = 24$.
- Es kann mehrere maximale Flüsse geben.

Mehrere Quellen und Senken



- Es kann auch Flussnetzwerke mit mehrere Quellen oder Senken geben.
- Sie können durch eine neue „Superquelle“ und „Supersenke“ in ein übliches Flussnetzwerk überführt werden.

Flüsse zwischen Knotenmengen

Notationen

$$
\begin{aligned}
f(x, Y) &= \sum_{y \in Y} f(x, y) && \text{für } Y \subseteq V \\
f(X, y) &= \sum_{x \in X} f(x, y) && \text{für } X \subseteq V \\
f(X, Y) &= \sum_{x \in X} \sum_{y \in Y} f(x, y) && \text{für } X, Y \subseteq V
\end{aligned}
$$

Eigenschaften von Flüssen zwischen Mengen

Für jeden Fluss f des Flussnetzwerkes $G = (V, E, c)$ gilt:

1. $f(X, X) = 0$ für $X \subseteq V$
2. $f(X, Y) = -f(Y, X)$ für $X, Y \subseteq V$
3. $f(X \cup Y, Z) = f(X, Z) + f(Y, Z)$ für $X, Y, Z \subseteq V : X \cap Y = \varnothing$
4. $f(Z, X \cup Y) = f(Z, X) + f(Z, Y)$ für $X, Y, Z \subseteq V : X \cap Y = \varnothing$

Beweis: $f(X, X) = 0$

$$
\begin{aligned}
f(X, X) &= \sum_{x_1 \in X} \sum_{x_2 \in X} f(x_1, x_2) \\
&= \frac{1}{2} \Big(\sum_{x_1 \in X} \sum_{x_2 \in X} f(x_1, x_2) + \sum_{x_1 \in X} \sum_{x_2 \in X} f(x_1, x_2) \Big) \\
&= \frac{1}{2} \Big(\sum_{x_1 \in X} \sum_{x_2 \in X} f(x_1, x_2) + \sum_{x_1 \in X} \sum_{x_2 \in X} f(x_2, x_1) \Big) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{x_1 \in X} \sum_{x_2 \in X} \big(f(x_1, x_2) + f(x_2, x_1) \big) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{x_1 \in X} \sum_{x_2 \in X} \big(f(x_1, x_2) - f(x_1, x_2) \big) \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Für den Beweis benötigen wir lediglich die Eigenschaft der Asymmetrie.

Eingehender Fluss in der Senke

Wie groß ist der an der Senke eingehende Fluss?

Aufgrund der Flusserhaltung in alle Zwischenknoten ist zu erwarten, dass er dem austretenden Fluss an der Quelle entspricht:

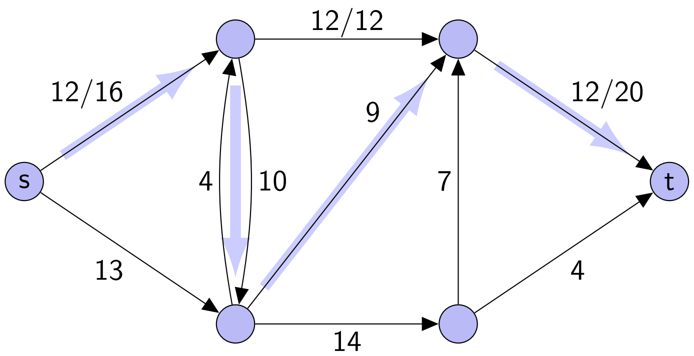
$$|f| \;=\; f(s, V) \;=\; f(V, t)$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
f(s, V) &= f(V, V) - f(V - \{s\}, V) && \mid \text{Eigenschaft 3} \\
&= -f(V - \{s\}, V) && \mid \text{Eigenschaft 1} \\
&= f(V, V - \{s\}) && \mid \text{Eigenschaft 2} \\
&= f(V, t) + f(V, V - \{s, t\}) && \mid \text{Eigenschaft 4} \\
&= f(V, t). && \mid \text{Flusserhaltung}
\end{aligned}$$

Übersicht

Ford-Fulkerson-Methode – Idee (1962)



1. Suche einen Pfad p von s nach t.
2. Setze den Fluss der Kanten in p um die kleinste Kapazität in p.
3. Suche einen Pfad p' von s nach t, aus Kanten mit freier Kapazität.
4. Ergänze den Fluss der Kanten in p' um die kleinste Restkapazität in p.
5. Wiederhole 3. und 4. bis es keinen Pfad p mehr gibt.

Restnetzwerke

„Netzwerk minus Fluss = Restnetzwerk“

Definition (Restnetzwerk G_f)

Sei Flussnetzwerk $G = (V, E, c)$ und Fluss f. Dann ist $G_f = (V, E_f, c_f)$ das Restnetzwerk (auch: Residualnetzwerk) zu G und f mit:

$$c_f(u, v) = c(u, v) - f(u, v),$$

und

$$E_f = \{\, (u, v) \in V \times V \mid c_f(u, v) > 0 \,\},$$

- $c_f(u, v)$ ist die Restkapazität von (u, v) in G zu Fluss f.
- E_f sind die Kanten die noch mehr Fluss aufnehmen können.

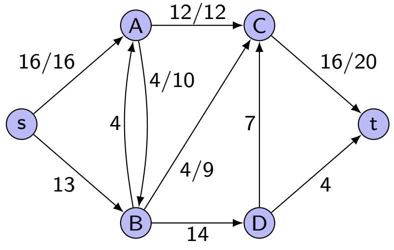
Restnetzwerk: Beispiel

Definition (Restnetzwerk G_f)

Sei Flussnetzwerk $G = (V, E, c)$ und Fluss f. Dann ist $G_f = (V, E_f, c_f)$ das Restnetzwerk (auch: Residualnetzwerk) zu G und f mit:

- $c_f(u, v) = c(u, v) - f(u, v)$
- $E_f = \{ (u, v) \in V \times V \mid c_f(u, v) > 0 \}$.

$c_f(u, v)$ ist die Restkapazität von (u, v) in G zu Fluss f.



Flussnetzwerk G

Restnetzwerk G_f

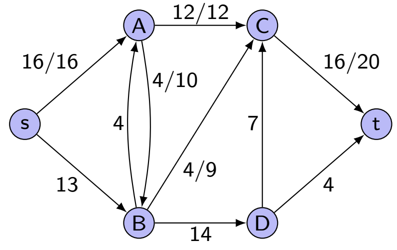
Restnetzwerk: Beispiel

Definition (Restnetzwerk G_f)

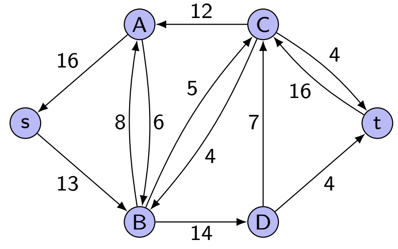
Sei Flussnetzwerk $G = (V, E, c)$ und Fluss f. Dann ist $G_f = (V, E_f, c_f)$ das Restnetzwerk (auch: Residualnetzwerk) zu G und f mit:

- $c_f(u, v) = c(u, v) - f(u, v)$
- $E_f = \{ (u, v) \in V \times V \mid c_f(u, v) > 0 \}$.

$c_f(u, v)$ ist die Restkapazität von (u, v) in G zu Fluss f.



Flussnetzwerk G



Restnetzwerk G_f

Restnetzwerk

Definition (Restnetzwerk G_f)

Sei Flussnetzwerk $G = (V, E, c)$ und Fluss f. Dann ist $G_f = (V, E_f, c_f)$ das Restnetzwerk (auch: Residualnetzwerk) zu G und f mit:

- $c_f(u, v) = c(u, v) - f(u, v)$
- $E_f = \{ (u, v) \in V \times V \mid c_f(u, v) > 0 \}$.

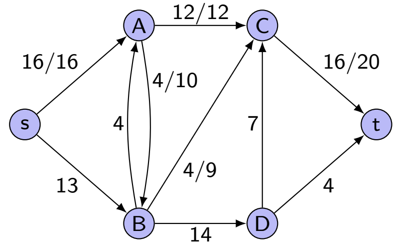
$c_f(u, v)$ ist die Restkapazität von (u, v) in G zu Fluss f.

Kanten im Restnetzwerk

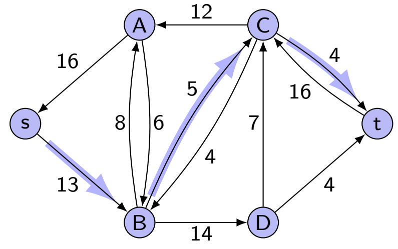
- Falls $f(u, v) < c(u, v)$, dann folgt $c_f(u, v) > 0$ und $(u, v) \in E_f$
- Falls $f(u, v) > 0$, dann $f(v, u) < 0$, und damit $c_f(v, u) > 0$ und $(v, u) \in E_f$
- Falls weder $(u, v) \notin E$ noch $(v, u) \notin E$, dann $c_f(u, v) = c_f(v, u) = 0$

Also $|E_f| \leqslant 2 \cdot |E|$.

Augmentierende Pfade



Flussnetzwerk G

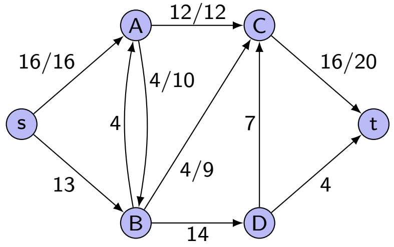


Restnetzwerk G_f

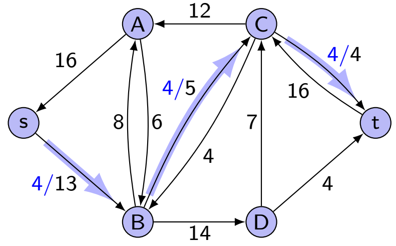
- Ein s-t-Pfad p in Restnetzwerk G_f heißt augmentierender Pfad (vergrößernder Pfad).
- $c_f(p) = \min\{ c_f(u, v) \mid (u, v) \in p \}$ heißt Restkapazität von p.

Der Pfad im obigen Beispiel hat die Restkapazität 4.

Augmentierende Pfade



Flussnetzwerk G



Restnetzwerk G_f

Sei G ein Flussnetzwerk, f ein Fluss in G, p ein augmentierender Pfad in G_f. Sei:

$$f_p(u,v) = \begin{cases} c_f(p) & \text{falls } (u,v) \text{ auf } p \\ -c_f(p) & \text{falls } (v,u) \text{ auf } p \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann ist f_p ein Fluss in Restnetzwerk G_f mit dem Wert $|f_p| = c_f(p) > 0$.

Ford-Fulkerson-Theorem

Idee: ergänze ein Fluss f in G um den Fluss f' im Restnetzwerk G_f.

Sei $f_1, f_2 : V \times V \to \mathbb{R}$ zwei Flüsse. Die Flusssumme $f_1 + f_2$ ist definiert durch: $(f_1+f_2)(u,v) = f_1(u,v) + f_2(u,v)$.

Theorem (Ford-Fulkerson)

Sei $G = (V,E,c)$ ein Flussnetzwerk und f ein Fluss in G, sowie f' ein Fluss in G_f.

Dann gilt: $f + f'$ ist ein Fluss in G (mit dem Wert $|f + f'|$).

Beweis.

Wir zeigen, dass $f + f'$ beschränkt, asymmetrisch und flusserhaltend ist (s. nächste Folie). □

1. Asymmetrie:

$$\begin{aligned}(f+f')(u,v) &= f(u,v) + f'(u,v)\\ &= -f(v,u) - f'(v,u)\\ &= -(f(v,u) + f'(v,u))\\ &= -(f+f')(v,u)\end{aligned}$$

2. Flusserhaltung:

$$(f+f')(u,V) \quad = \quad f(u,V) + f'(u,V) = 0 \qquad | \; \forall u \in V - \{s,t\}$$

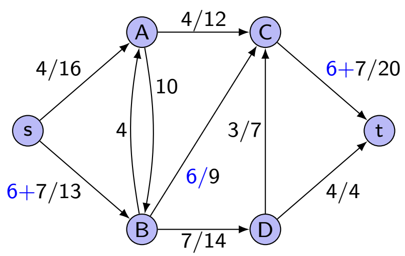
3. Beschränkung:

$$\begin{aligned}(f+f')(u,v) &= f(u,v) + f'(u,v)\\ &\leqslant f(u,v) + c_f(u,v)\\ &= f(u,v) + (c(u,v) - f(u,v))\\ &= c(u,v).\end{aligned}$$

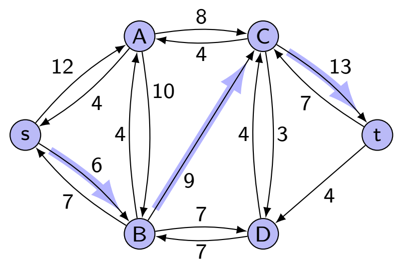
Die Ford-Fulkerson-Methode

Algorithmus

Initialisiere Fluss f zu 0
while es gibt einen augmentierenden Pfad p
  do augmentiere f entlang p // $f := f + f_p$
return f



Flussnetzwerk G



Restnetzwerk G_f

Implementierung Ford-Fulkerson-Methode

```
int[n,n] maxFlow(List adjLst[n], int n, int s, int t) {
  int flow[n,n] = 0, path[];
  int cfp; // Restkapazität des Pfades

  while (true) {
    // Finde augmentierenden Pfad und dessen Restkapazität
    (path, cfp) = augmentPfad(adjLst, flow, s, t);
    if (cfp == 0) { // kein Pfad gefunden
      return flow;
    }

    // addiere Restkapazität entlang des Pfades zum Fluss
    for (int i = 1; i < path.length; i++) {
      int u = path[i-1], v = path[i];
      flow[u,v] = flow[u,v] + cfp;
      flow[v,u] = -flow[u,v];
    }
  }
}
```


Laufzeit der Ford-Fulkerson-Methode

Ein Flussproblem ist integral, wenn alle Kapazitäten ganzzahlig sind.

Zeitkomplexität

Sei f^* der durch die Ford-Fulkerson-Methode bestimmte Fluss zu einem integralen Flussproblem, so benötigt die Methode $|f^*|$ Iterationen und es ergibt sich eine Laufzeit von $O(|E| \cdot |f^*|)$.

Beweis.

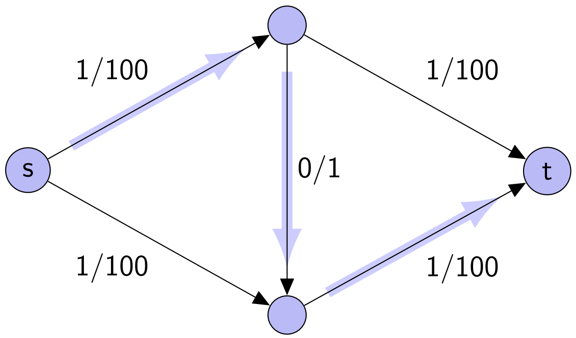
In jeder Iteration wird der Wert des Flusses um $c_f(p) \geqslant 1$ erhöht. Er ist anfangs 0 und am Ende f^*. Es gibt maximal $|E|$ Iterationen. □

Korollar

Bei rationalen Kapazitäten terminiert die Ford–Fulkerson–Methode. Brüche können durch Multiplikation aufgehoben werden.

- Für ein integrales Flussproblem bestimmt die Ford-Fulkerson-Methode einen Fluss f, sodass jedes $f(u, v)$ ganzzahlig ist.

Laufzeit der Ford-Fulkerson-Methode



Die Worst-Case-Laufzeit ist abhängig vom Wert eines maximalen Flusses, da der Wert des Flusses im schlimmsten Fall sich jeweils nur um eine Einheit erhöht.

Korrektheit Ford-Fulkerson Methode

Die Ford-Fulkerson Methode erweitert sukzessive den Fluss in G um augmentierende Pfade im Restnetzwerk G_f bis es keine solche Pfade mehr gibt.

Ist das korrekt?

Wir werden zeigen, dass ein Fluss in G genau dann maximal ist, wenn sein Restnetzwerk keine augmentierende Pfade enthält.

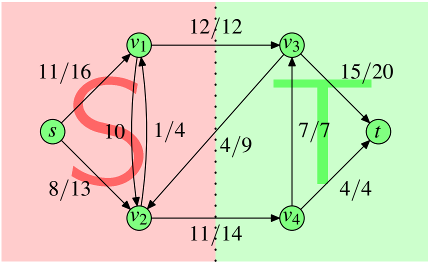
Dazu benutzen wir Schnitte.

Schnitte in Flussnetzwerken

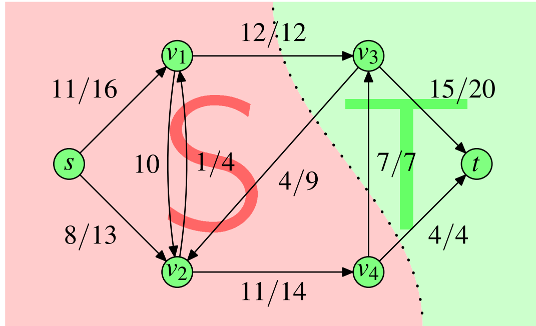
Definition

Ein Schnitt (S, T) in einem Flussnetzwerk $G = (V, E, c)$ ist eine Partition $S \cup T = V$, $S \cap T = \varnothing$ mit $s \in S$ und $t \in T$.

- Wenn f ein Fluss in G ist, dann ist $f(S, T)$ der Fluss über (S, T).
- Die Kapazität von (S, T) ist $c(S, T)$.
- Ein minimaler Schnitt ist ein Schnitt mit minimaler Kapazität.



Schnitte in Flussnetzwerken



S	:	$\{s, v_1, v_2\}$	$\{s\}$	$\{s, v_1, v_2, v_4\}$
T	:	$\{t, v_3, v_4\}$	$\{t, v_1, v_2, v_3, v_4\}$	$\{t, v_3\}$
Fluss	:	12+11-4 19	11+8 19	12-4+7+4 19
Kapazität	:	12+14 26	13+16 29	12+7+4 23

- Für den Fluss über einen Schnitt gilt: $f(S, T) = |f| \leqslant c(S, T)$.

Max-flow Min-cut Theorem

Max-flow Min-cut Theorem

Sei f ein Fluss im Flussnetzwerk $G = (V, E, c)$, dann sind äquivalent:

1. f ist ein maximaler Fluss.
2. In Restnetzwerk G_f gibt es keinen augmentierenden Pfad.
3. $|f| = c(S, T)$ für einen Schnitt (S, T), d. h. (S, T) ist minimal.

Folgerungen

1. Die Kapazität eines minimalen Schnittes ist gleich dem Wert eines maximalen Flusses.
2. Falls die Ford–Fulkerson–Methode terminiert, berechnet sie einen maximalen Fluss.

Max-flow Min-cut Theorem

Max-flow Min-cut Theorem

Sei f ein Fluss im Flussnetzwerk $G = (V, E, c)$, dann sind äquivalent:

1. f ist ein maximaler Fluss.
2. In Restnetzwerk G_f gibt es keinen augmentierenden Pfad.
3. $|f| = c(S, T)$ für einen Schnitt (S, T), d. h. (S, T) ist minimal.

1. $\Rightarrow$ 2. (Widerspruchsbeweis).

Sei f ein maximaler Fluss in G und p einen augmentierender Pfad in G_f.

$\Rightarrow$ $f + f_p$ ist ein Fluss in G mit $|f + f_p| > |f|$.

$\Rightarrow$ Widerspruch! Denn f ist ein maximaler Fluss.

$\square$

Max-flow Min-cut Theorem

Max-flow Min-cut Theorem

Sei f ein Fluss im Flussnetzwerk $G = (V, E, c)$, dann sind äquivalent:

1. f ist ein maximaler Fluss.
2. In Restnetzwerk G_f gibt es keinen augmentierenden Pfad.
3. $|f| = c(S, T)$ für einen Schnitt (S, T), d. h. (S, T) ist minimal.

2. ⇒ 3.

Nehme an, es gibt keinen s-t-Pfad (d.h. augmentierden Pfad) in G_f.

Sei $S := \{ v \in V \mid \exists\ s\text{-}v\text{-Pfad in } G_f \}$ und $T := V - S$, dann gilt:

1. $\forall u \in S,\ v \in T$ gilt: $c_f(u, v) = 0 \quad \Rightarrow \quad f(u, v) = c(u, v)$.
2. (S, T) ist ein Schnitt und somit gilt $f(S, T) = |f|$.

$\Rightarrow$ $c(S, T) = f(S, T) = |f|$.

□

Max-flow Min-cut Theorem

Max-flow Min-cut Theorem

Sei f ein Fluss im Flussnetzwerk $G = (V, E, c)$, dann sind äquivalent:

1. f ist ein maximaler Fluss.
2. In Restnetzwerk G_f gibt es keinen augmentierenden Pfad.
3. $|f| = c(S, T)$ für einen Schnitt (S, T), d. h. (S, T) ist minimal.

3. ⇒ 1.

Sei f' ein beliebiger Fluss in G dann gilt:

$$|f'| = f'(S, T) = \sum_{u \in S} \sum_{v \in T} f'(u, v) \leqslant \sum_{u \in S} \sum_{v \in T} c(u, v) = c(S, T)$$

Da $|f| = c(S, T)$ und $\forall f' :\ |f'| \leqslant c(S, T)$, folgt f ist maximal.

□

Übersicht

Edmonds-Karp-Algorithmus

Edmonds-Karp-Algorithmus

Eine Implementierung der Ford-Fulkerson-Methode, die zur Bestimmung augmentierender Pfade eine Breitensuche nutzt. Laufzeit: $O(|V| \cdot |E|^2)$.

Sie erweitert stets den Fluss entlang kürzester Pfade.

Lemma

Im Edmonds-Karp-Algorithmus steigt für alle Knoten $v \in V - \{s, t\}$ der Abstand (d.h. Anzahl der Kanten) des kürzesten Pfades von s nach v im Restnetzwerk G_f monoton mit jeder Flusserweiterung.

Theorem

Die Gesamtzahl der Flusserweiterungen im Edmonds-Karp-Algorithmus für das Flussnetzwerk $G = (V, E, c)$ ist in $O(|V| \cdot |E|)$.

Andere Max-Flow Algorithmen

Max-Flow Algorithmen nach Veröffentlichung [Bearbeiten]

Jahr	Autor(en)	Name	Laufzeiten
1956	Ford, Fulkerson	Algorithmus von Ford und Fulkerson	$\mathcal{O}(m \cdot n \cdot u_{\max})$, falls alle Kapazitäten ganzzahlig sind
1969	Edmonds, Karp	Algorithmus von Edmonds und Karp	$\mathcal{O}(m^2 \cdot n)$
1970	Dinic	Algorithmus von Dinic	$\mathcal{O}(m \cdot n^2)$
1973	Dinic, Gabow		$\mathcal{O}(m \cdot n \cdot \log(u_{\max}))$
1974	Karzanov		$\mathcal{O}(n^3)$
1977	Cherkassky		$\mathcal{O}(n^2 \cdot \sqrt{m})$
1980	Galil, Naamad		$\mathcal{O}(m \cdot n \cdot \log(n)^2)$
1983	Sleator, Tarjan		$\mathcal{O}(m \cdot n \cdot \log(n))$
1986	Goldberg, Tarjan	Goldberg-Tarjan-Algorithmus	$\mathcal{O}\left(m \cdot n \cdot \log\left(\frac{n^2}{m}\right)\right)$
1987	Ahuja, Orlin		$\mathcal{O}(m \cdot n + n^2 \cdot \log(u_{\max}))$
1987	Ahuja, Orlin, Tarjan		$\mathcal{O}\left(m \cdot n \cdot \log\left(2 + \frac{n \cdot \sqrt{\log(u_{\max})}}{m}\right)\right)$
1990	Cheriyan, Hagerup, Mehlhorn		$\mathcal{O}\left(\frac{n^3}{\log(n)}\right)$
1990	Alon		$\mathcal{O}\left(m \cdot n + \sqrt[3]{n^8} \cdot \log(n)\right)$
1992	King, Rao, Tarjan		$\mathcal{O}(m \cdot n + n^{2+e})$
1993	Philipps, Westbrook[1]		$\mathcal{O}\left(m \cdot n \cdot \log_{\frac{m}{n}}(n) + n^2 \cdot \log(n)^{2+e}\right)$
1994	King, Rao, Tarjan[2]		$\mathcal{O}\left(m \cdot n \cdot \log_{\frac{m}{n \cdot \log(n)}}(n)\right)$
1997	Goldberg, Rao[3]		$\mathcal{O}\left(\min\{\sqrt{m}, \sqrt[3]{n^2}\} \cdot m \cdot \log\left(\frac{n^2}{m}\right) \cdot \log(u_{\max})\right)$

Legende

- $n = \lvert V \rvert =$ „Anzahl der Knoten"
- $m = \lvert E \rvert =$ „Anzahl der Kanten"
- $u_{\max} =$ „Maximum der Kapazitätsfunktion u"

1. ↑ Steven J. Phillips, Jeffery Westbrook: *On-Line Load Balancing and Network Flow*. In Algorithmica Volume 21, Number 3, Juli 1998 245-261
2. ↑ V. King, S. Rao, R. Tarjan: *A Faster Deterministic Maximum Flow Algorithm*. In Journal of Algorithms, Volume 17, Issue 3, November 1994 447-474
3. ↑ Dávid Papp: *The Goldberg–Rao Algorithm for the Maximum Flow Problem* *(PDF; 111 kB)* (2006)