Datenstrukturen und Algorithmen

Vorlesung 12: Hashing I (K11)

Joost-Pieter Katoen

Lehrstuhl für Informatik 2
Software Modeling and Verification Group

http://moves.rwth-aachen.de/teaching/ss-15/dsal/

20. Mai 2015

RWTH AACHEN UNIVERSITY

Übersicht

Einführung (I)

Dictionary (Wörterbuch)

Das Dictionary (auch: Map, assoziatives Array) speichert Informationen, die jederzeit anhand ihres Schlüssels abgerufen werden können. Weiterhin:

- Die Daten sind dynamisch gespeichert.
- `Element dictSearch(Dict d, int k)` gibt die in `d` zum Schlüssel `k` gespeicherten Informationen zurück.
- `void dictInsert(Dict d, Element e)` speichert Element `e` unter seinem Schlüssel `e.key` in `d`.
- `void dictDelete(Dict d, Element e)` löscht das Element `e` aus `d`, wobei `e` in `d` enthalten sein muss.

Beispiel

Symboltabelle eines Compilers, wobei die Schlüssel Strings (etwa Bezeichner) sind.

Einführung (II)

Problem

Welche Datenstrukturen sind geeignet, um ein Dictionary zu implementieren?

- Heap: Einfügen und Löschen sind effizient. Aber was ist mit Suche?
- Sortiertes Array/Liste: Einfügen ist im Worst-Case linear.
- Rot-Schwarz-Baum: Alle Operationen sind im Worst-Case logarithmisch.

Lösung

Unter realistischen Annahmen benötigt eine Hash-Tabelle im schnitt $O(1)$ für alle Operationen.

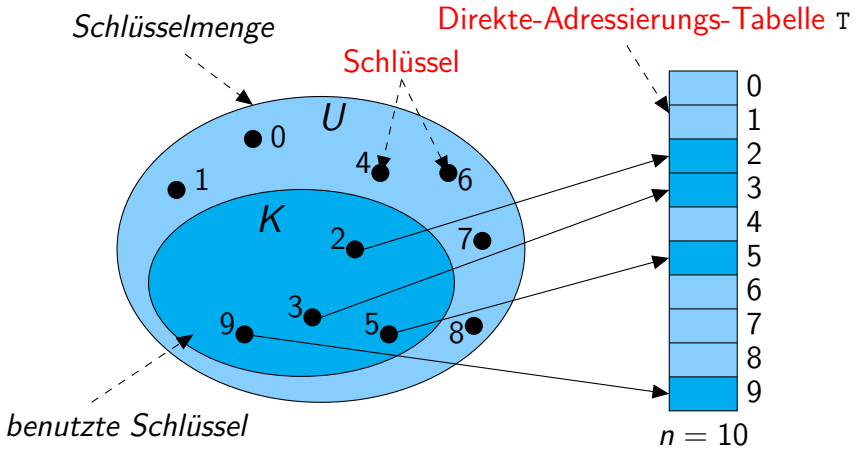
Übersicht

Direkte Adressierung (I)

Direkte Adressierung

- Alloziere ein Array (die Direkte-Adressierungs-Tabelle), so dass es für jeden möglichen Schlüssel eine(1) Position gibt.
- Jedes Array-Element enthält einen Pointer auf die gespeicherte Information.
  - Der Einfachheit halber vernachlässigen wir in der Vorlesung die zu den Schlüsseln gehörenden Informationen.
- Mit Schlüsselmenge $U = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ ergibt sich:
  - Eine Direkte-Adressierungs-Tabelle `T[0..n-1]`, wobei `T[k]` zu Schlüssel `k` gehört.
  - `datSearch(T, int k): return T[k];`
  - `datInsert(T, Element e): T[e.key] = e;`
  - `datDelete(T, Element e): T[e.key] = null;`
- Die Laufzeit jeder Operation ist im Worst-Case $\Theta(1)$.

Direkte Adressierung (II)



Duplikate in Linearzeit erkennen

Alle Elemente seien ganze Zahlen zwischen 0 und k, wobei $k \in \Theta(n)$.

```
1  bool checkDuplicates(int E[n], int n, int k) {
2    int histogram[k] = 0; // "Direkte-Adressierungs-Tabelle"
3    for (int i = 0; i < n; i++) {
4      if (histogram[E[i]] > 0) {
5        return true; // Duplikat gefunden
6      } else {
7        histogram[E[i]]++; // Zähle Häufigkeit
8      }
9    }
10   return false; // keine Duplikate
11 }
```

Counting Sort – Idee

1. Berechne Häufigkeit
2. Berechne „Position von x“ = „Anzahl der Elemente $\leqslant x$“
3. Erzeuge Ausgabearray anhand dieser neuen Positionen

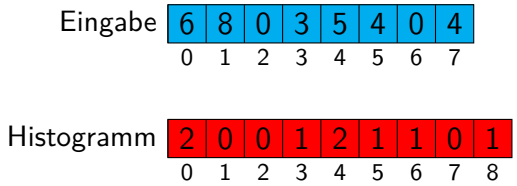
Counting Sort

Alle Elemente seien ganze Zahlen zwischen 0 und k, wobei $k \in \Theta(n)$.

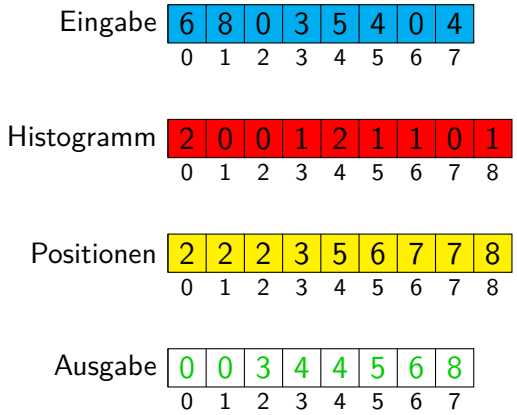
```
1  int[n] countSort(int E[n], int n, int k) {
2    int histogram[k] = 0; // "Direkte-Adressierungs-Tabelle"
3    for (int i = 0; i < n; i++) {
4      histogram[E[i]]++; // Zähle Häufigkeit
5    }
6    for (int i = 1; i < k; i++) { // Berechne Position
7      histogram[i] = histogram[i] + histogram[i - 1];
8    }
9    // Erzeuge Ausgabe
10   int result[n];
11   for (int i = n - 1; i >= 0; i--) { // stabil: rückwärts
12     histogram[E[i]]--;
13     result[histogram[E[i]]] = E[i];
14   }
15   return result;
16 }
```

- Worst-Case Zeitkomplexität: $\Theta(n)$

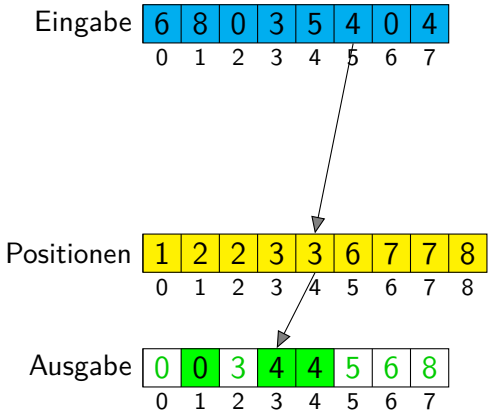
Counting Sort: Beispiel



Counting Sort: Beispiel



Counting Sort: Beispiel



Counting Sort (II)

Problem

Wir sortieren also mit Worst-Case Komplexität $\Theta(n)$, obwohl wir als untere Schranke $\Theta(n \cdot \log n)$ *bewiesen* hatten?

Lösung

Dieser Algorithmus ist nicht mit Quicksort, Heapsort, usw. vergleichbar

- *denn er basiert nicht auf Vergleich von Elementen, sondern auf Häufigkeiten.*
- *Das funktioniert, indem wir Direkte-Adressierung (Einfügen, Suchen, Löschen in $\Theta(1)$) ausnutzen.*

Hauptproblem: Übermäßiger Speicherbedarf für das Array.

- Zum Beispiel bei Strings mit 20 Zeichen (5 bit/Zeichen) als Schlüssel benötigt man $2^{5 \cdot 20} = 2^{100}$ Arrayeinträge.
- Können wir diesen riesigen Speicherbedarf vermeiden und effizient bleiben? Ja! – mit Hashing.

Übersicht

Hashing (I)

Praktisch wird nur ein kleiner Teil der Schlüssel verwendet, d. h. $|K| \ll |U|$.

$\Rightarrow$ Bei Direkter-Adressierung ist der größte Teil von T verschwendet.

Das Ziel von Hashing ist:

- Einen extrem großen Schlüsselraum auf einen vernünftig kleinen Bereich von ganzen Zahlen abzubilden.
- Dass zwei Schlüssel auf die selbe Zahl abgebildet werden, soll möglichst unwahrscheinlich sein.

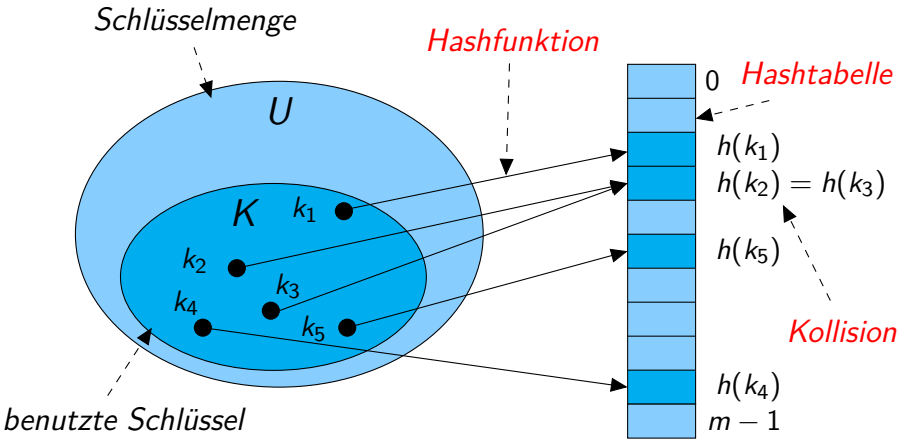
Hashfunktion, Hashtabelle, Hashkollision

Eine Hashfunktion bildet einen Schlüssel auf einen Index der Hashtabelle T ab:

$$h : U \longrightarrow \{0, 1, \ldots, m-1\} \text{ für Tabellengröße } m \text{ und } |U| = n.$$

Wir sagen, dass $h(k)$ der Hashwert des Schlüssels k ist.
Das Auftreten von $h(k) = h(k')$ für $k \neq k'$ nennt man eine Kollision.

Hashing (II)



- Wie finden wir Hashfunktionen, die einfach auszurechnen sind und Kollisionen minimieren?
- Wie behandeln wir dennoch auftretende Kollisionen?

Kollisionen: Das Geburtstagsparadoxon (I)

Unsere Hashfunktion mag noch so gut sein,
wir sollten auf Kollisionen vorbereitet sein!

Das liegt am

Geburtstagsparadoxon

- Die Wahrscheinlichkeit, dass dein Nachbar am selben Tag wie du Geburtstag hat ist $\frac{1}{365} \approx 0{,}0027$.
- Fragt man 23 Personen, wächst die Wahrscheinlichkeit auf $\frac{23}{365} \approx 0{,}063$.
- Sind aber 23 Personen in einem Raum, dann haben zwei von ihnen den selben Geburtstag mit Wahrscheinlichkeit

$$1 - \left(\frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \cdot \ldots \cdot \frac{343}{365}\right) \approx 0{,}5$$

Kollisionen: Das Geburtstagsparadoxon (II)

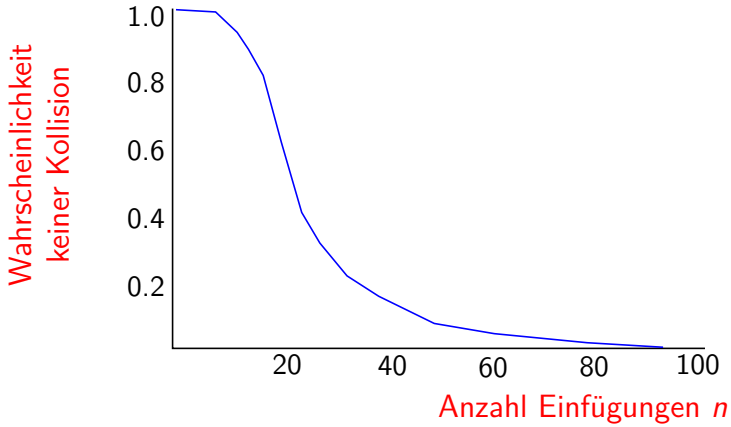
Auf Hashing angewendet bedeutet das:

- Die Wahrscheinlichkeit keiner Kollision nach k Einfügevorgängen in einer m-elementigen Tabelle ist:

$$\frac{m}{m} \cdot \frac{m-1}{m} \cdot \ldots \cdot \frac{m-k+1}{m} = \prod_{i=0}^{k-1} \frac{m-i}{m}$$

- Dieses Produkt geht gegen 0.
- Etwa bei $m = 365$ ist die Wahrscheinlichkeit für $k \geqslant 50$ praktisch 0.

Kollisionen: Das Geburtstagsparadoxon (III)

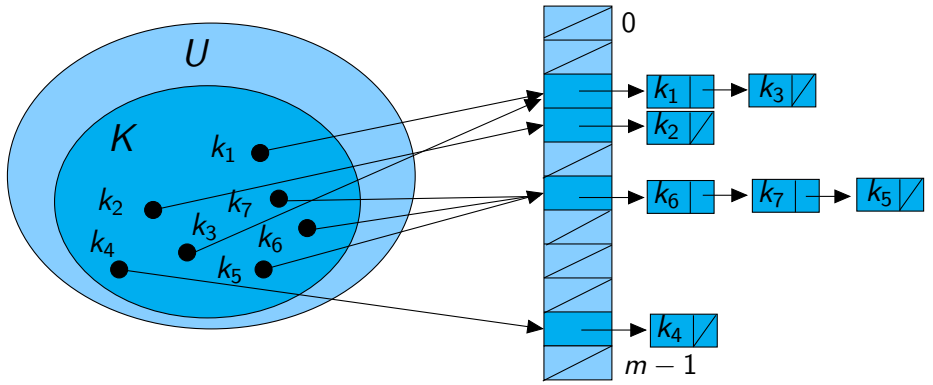


Übersicht

Kollisionsauflösung durch Verkettung (I)

Idee

Alle Schlüssel, die zum gleichen Hash führen, werden in einer verketteten Liste gespeichert. [Luhn 1953]



Kollisionsauflösung durch Verkettung (II)

Dictionary-Operationen bei Verkettung (informell)

- `hcSearch(int k)`: Suche nach einem Element mit Schlüssel k in der Liste `T[h(k)]`.
- `hcInsert(Element e)`: Setze Element `e` an das Ende der Liste `T[h(e.key)]`.
- `hcDelete(Element e)`: Lösche Element `e` aus der Liste `T[h(e.key)]`.

Kollisionsauflösung durch Verkettung (III)

Worst-Case Komplexität

Angenommen, die Berechnung von $h(k)$ ist recht effizient, etwa $\Theta(1)$.
Die Komplexität ist:

Suche: Proportional zur Länge der Liste $T[h(k)]$.

Einfügen: Konstant (ohne Überprüfung, ob das Element schon vorhanden ist).

Löschen: Proportional zur Länge der Liste $T[h(k)]$.

- Im Worst-Case haben alle Schüssel den selben Hashwert.
- Suche und Löschen hat dann die selbe Worst-Case Komplexität wie Listen: $\Theta(n)$.

- Im Average-Case ist Hashing mit Verkettung aber dennoch effizient!

Average-Case-Analyse von Verkettung (I)

Annahmen:

- Es gebe n mögliche Schlüssel und m Hashtabellenpositionen, $n \gg m$.
- Gleichverteiltes Hashing: Jeder Schlüssel wird mit gleicher Wahrscheinlichkeit und unabhängig von den anderen Schlüssel auf jedes der m Slots abgebildet.
- Der Hashwert $h(k)$ kann in konstanter Zeit berechnet werden.

O, Θ, Ω erweitert

Aus technischen Gründen erweitern wir die Definition von O, Θ und Ω auf Funktionen mit zwei Parametern.

- Beispielsweise ist $g \in O(f)$ gdw.

  $\exists c > 0, n_0, m_0$ mit $\forall n \geqslant n_0, m \geqslant m_0 : 0 \leqslant g(n,m) \leqslant c \cdot f(n,m)$

Average-Case-Analyse von Verkettung (II)

- Der Füllgrad der Hashtabelle `T` ist $\alpha(n,m) = \frac{n}{m}$.

$\Rightarrow$ Auch die durchschnittliche Länge der Liste `T[h(k)]` ist α

- Wieviele Elemente aus `T[h(k)]` müssen nun im Schnitt untersucht werden, um den Schlüssel k zu finden?

$\Rightarrow$ Unterscheide erfolgreiche von erfolgloser Suche (wie in Vorlesung 1).

Average-Case-Analyse von Verkettung (III)

Erfolglose Suche

Die erfolglose Suche benötigt $\Theta(1+\alpha)$ Zeit im Average-Case.

- Die erwartete Zeit, um Schlüssel k zu finden ist gerade die Zeit, um die Liste `T[h(k)]` zu durchsuchen.
- Die erwartete Länge dieser Liste ist α.
- Das Berechnen von $h(k)$ benötige nur eine Zeiteinheit.

$\Rightarrow$ Insgesamt erhält man $1+\alpha$ Zeiteinheiten im Durchschnitt.

Average-Case-Analyse von Verkettung (IV)

Erfolgreiche Suche

Die erfolgreiche Suche benötigt im Average-Case auch $\Theta(1+\alpha)$.

- Sei k_i der i-te eingefügte Schlüssel und $A(k_i)$ die erwartete Zeit, um k_i zu finden:

$$A(k_i) = 1 + \begin{array}{l}\text{Durchschnittliche Anzahl Schlüssel,}\\ \text{die in } \texttt{T[h(k\_i)]} \text{ erst nach } k_i \text{ eingefügt wurden}\end{array}$$

- Annahme von gleichverteiltem Hashing ergibt: $A(k_i) = 1 + \sum_{j=i+1}^{n} \frac{1}{m}$
- Durchschnitt über alle n Einfügungen in die Hashtabelle: $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} A(k_i)$

Average-Case-Analyse von Verkettung (IV)

Die erwartete Anzahl an untersuchten Elementen bei einer erfolgreichen Suche ist:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(1+\sum_{j=i+1}^{n}\frac{1}{m}\right) \quad \text{| Summe aufteilen}$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}1+\frac{1}{nm}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n}1 \quad \text{| Vereinfachen}$$

$$= 1+\frac{1}{nm}\sum_{i=1}^{n}(n-i) \quad \text{| Summe } 1\ldots n-1$$

$$= 1+\frac{1}{nm}\cdot\frac{n(n-1)}{2} \quad \text{| Vereinfachen}$$

$$= 1+\frac{n-1}{2m} = 1+\frac{\alpha}{2}-\frac{\alpha}{2n} \quad \text{und damit in } \Theta(1+\alpha)$$

Komplexität der Dictionary-Operationen mit Verkettung

- Vorausgesetzt die Anzahl der Einträge m ist (wenigstens) proportional zu n,
- dann ist der Füllgrad $\alpha(n,m) = \frac{n}{m} \in \frac{O(m)}{m} = O(1)$.
- Damit benötigen alle Operationen im Durchschnitt $O(1)$.
- Weil das auch *Suche* mit einschließt, können wir im Average-Case mit $O(n)$ sortieren.

Übersicht

Anwendungen von Hashfunktionen

- Digitale Zertifikate (SSL: sha1 bzw. md5)
- Digitale Signaturen
  - in der Praxis unterschreibt man meist nicht die Nachricht, sondern ihren Hashwert
- Passwortverschlüsselung
  - z.B. htpasswd (Apache): md5, sha1 und Mediawiki: md5
- Verifikation von Downloads (üblich: md5)
- Versionskontrollsysteme
  - z.B. subversion: md5, git: sha1
- Datenblockverifikation bei Filesharingprogrammen (wie Bittorrent)
- .....

Gängige (kryptographische) Hashfunktionen

Name	Hashgrösse	Jahr
MD2	128	1989
MD4	128	1990
MD5	128	1992
MD6[5]	variabel < 512	2008
SHA(0)	160	1992 - durch SHA1 ersetzt
SHA1	160	1995
SHA224 (SHA2)	224	2004
SHA256 (SHA2)	256	2001
SHA384 (SHA2)	384	2001
SHA512 (SHA2)	512	2001
SHA3	?	Wettbewerb läuft

Hashfunktionen

Hashfunktion

- Eine Hashfunktion bildet einen Schlüssel auf eine ganze Zahl (d. h. einen Index) ab.

- Was macht eine „gute“ Hashfunktion aus?
  - Die Hashfunktion $h(k)$ sollte einfach zu berechnen sein,
  - sie sollte surjektiv auf der Menge $0 \ldots m-1$ sein,
  - sie sollte alle Indizes mit möglichst gleicher Häufigkeit verwenden, und
  - ähnliche Schlüssel möglichst breit auf die Hashtabelle verteilen.
- Drei Basistechniken, eine „gute“ Hashfunktion zu erhalten:
  - Die Divisionsmethode,
  - die Multiplikationsmethode, und
  - universelles Hashing.

Divisionsmethode

Divisionsmethode

Hashfunktion: $h(k) = k \bmod m$

- Bei dieser Methode muss der Wert von m sorgfältig gewählt werden.
  - Für $m = 2^p$ ist $h(k)$ einfach die letzte p Bits.
  - Besser ist es, $h(k)$ abhängig von mehreren Bits zu machen.
- Gute Wahl ist m prim und nicht zu nah an einer Zweierpotenz.

Beispiel

- Strings mit 2000 Zeichen als Schlüssel.
- Wir erlauben durchschnittlich 3 Sondierungen für die erfolglose Suche.

$\Rightarrow$ Wähle $m \approx 2000/3 \longrightarrow 701$.

- Nähe an 2000/3, Primzahl, und nicht in der Näje von Zweierpotenz

Multiplikationsmethode (I)

Multiplikationsmethode

Hashfunktion: $h(k) = \lfloor m \cdot (k \cdot c \bmod 1) \rfloor$ für $0 < c < 1$

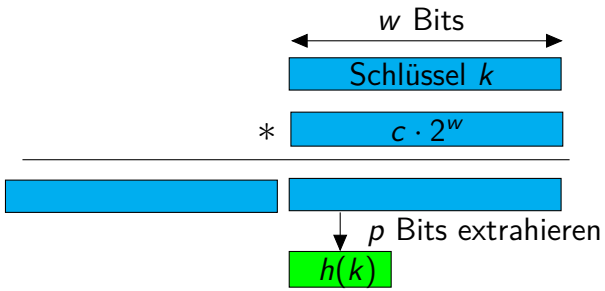
- $k \cdot c \bmod 1$ ist der Nachkommateil von $k \cdot c$, d. h. $k \cdot c - \lfloor k \cdot c \rfloor$.
- Knuth empfiehlt $c \approx (\sqrt{5} - 1)/2 \approx 0{,}62$.

$\Rightarrow$ Der Wert von m ist hier nicht kritisch.

Multiplikationsmethode (II)

Hashfunktion: $h(k) = \lfloor m \cdot (k \cdot c \bmod 1) \rfloor$.

- Das übliche Vorgehen nimmt $m = 2^p$ und $c = \frac{s}{2^w}$, wobei $0 < s < 2^w$. Dann:
  - Berechne zunächst $k \cdot s$ $(= k \cdot c \cdot 2^w)$.
  - Teile durch 2^w, verwende nur die Nachkommastellen.
  - Multipliziere mit 2^p und verwende nur den ganzzahligen Anteil.



Universelles Hashing (I)

Das größte Problem beim Hashing ist,

- dass es immer eine ungünstige Sequenz von Schlüsseln gibt, die auf den selben Slot abgebildet werden.

Idee

Wähle zufällig eine Hashfunktion aus einer gegebenen kleinen Menge H, unabhängig von den verwendeten Schlüsseln.

Eine Menge Hashfunktionen ist universell, wenn

- der Anteil der Funktionen aus H, so dass k und k' kollidieren ist $\frac{|H|}{m}$.
- d. h., die W'lichkeit einer Kollision von k und k' ist $\frac{1}{|H|} \cdot \frac{|H|}{m} = \frac{1}{m}$.

Für universelles Hashing ist die erwartete Länge der Liste `T[k]`

1. Gleich α, wenn k nicht in `T` enthalten ist.
2. Gleich $1+\alpha$, wenn k in `T` enthalten ist.

Universelles Hashing (II)

Beispiel

Definiere die Elemente der Klasse H von Hashfunktionen durch:

$$h_{a,b}(k) = ((a \cdot k + b) \bmod p) \bmod m$$

- p sei Primzahl mit $p > m$ und $p >$ größter Schlüssel.
- Die ganzen Zahlen a $(1 \leqslant a < p)$ und b $(0 \leqslant b < p)$ werden erst bei der Ausführung gewählt.

Die Klasse der obigen Hashfunktionen $h_{a,b}$ ist universell.

Nächste Vorlesung

Nächste Vorlesung

Donnerstag 21. Mai, 10:15 (Aula Hauptgebäude). Bis dann!