

Datenstrukturen und Algorithmen

Vorlesung 6: Mastertheorem (K4)

Joost-Pieter Katoen

Lehrstuhl für Informatik 2
Software Modeling and Verification Group

<http://moves.rwth-aachen.de/teaching/ss-15/dsa1/>

30. April 2015



Übersicht

1 Lösen von Rekursionsgleichungen

- Substitutionsmethode
- Rekursionsbäume
- Mastertheorem

Übersicht

1 Lösen von Rekursionsgleichungen

- Substitutionsmethode
- Rekursionsbäume
- Mastertheorem

Rekursionsgleichungen

Rekursionsgleichung

Für rekursive Algorithmen wird die Laufzeit meistens durch **Rekursionsgleichungen** beschrieben.

Eine **Rekursionsgleichung** ist eine Gleichung oder eine Ungleichung, die eine Funktion durch ihre eigenen Funktionswerte für kleinere Eingaben beschreibt.

Beispiele

- ▶ $T(n) = T(\lceil (n-1)/2 \rceil) + 1$ Binäre Suche
- ▶ $T(n) = T(n-1) + n - 1$ Bubblesort
- ▶ $T(n) = 2 \cdot T(n/2) + n - 1$ Mergesort
- ▶ $T(n) = 7 \cdot T(n/2) + c \cdot n^2$ Strassen's Matrixmultiplikation

Die zentrale Frage ist: Wie **löst** man solche Rekursionsgleichungen?

Die Substitutionsmethode

Substitutionsmethode

Die Substitutionsmethode besteht aus zwei Schritten:

1. **Rate** die Form der Lösung, durch z. B.:
 - ▶ Scharfes Hinsehen, kurze Eingaben ausprobieren und einsetzen
 - ▶ Betrachtung des Rekursionsbaums
2. **Vollständige Induktion**, um die Konstanten zu finden und zu zeigen, dass die Lösung funktioniert.

Die Substitutionsmethode: Beispiel

Beispiel

$T(n) = 2 \cdot T(n/2) + n$ für $n > 1$, und $T(1) = 1$

$$\begin{aligned}
 T(n) &= 2 \cdot T(n/2) + n && | \text{Induktionshypothese} \\
 &\leq 2(c \cdot n/2 \cdot \log n/2) + n \\
 &= c \cdot n \cdot \log n/2 + n && | \text{log-Rechnung: } (\log \equiv \log_2) \\
 & && | \log n/2 = \log n - \log 2 \\
 &= c \cdot n \cdot \log n - c \cdot n \cdot \log 2 + n \\
 &\leq c \cdot n \cdot \log n - c \cdot n + n && | \text{mit } c > 1 \text{ folgt sofort:} \\
 &\leq c \cdot n \cdot \log n
 \end{aligned}$$

Die Substitutionsmethode: Beispiel

Beispiel

Betrachte folgende Rekursionsgleichung:

$$\begin{aligned}
 T(1) &= 1 \\
 T(n) &= 2 \cdot T(n/2) + n \quad \text{für } n > 1.
 \end{aligned}$$

- ▶ Wir vermuten als Lösung $T(n) \in O(n \cdot \log n)$.
- ▶ Dazu müssen wir $T(n) \leq c \cdot n \cdot \log n$ zeigen, für ein geeignetes $c > 0$.
- ▶ Bestimme, ob für ein geeignetes n_0 und für $n \geq n_0$ gilt, dass $T(n) \leq c \cdot n \cdot \log n$.
- ▶ Stelle fest, dass $T(1) = 1 \leq c \cdot 1 \cdot \log 1 = 0$ **verletzt** ist.
- ▶ Es gilt: $T(2) = 4 \leq c \cdot 2 \log 2$ und $T(3) = 5 \leq c \cdot 3 \log 3$ für $c \geq 2$
- ▶ **Überprüfe** dann durch Substitution und Induktion (s. nächste Folie)
- ▶ Damit gilt für jedes $c \geq 2$ und $n \geq n_0 > 1$, dass $T(n) \leq c \cdot n \cdot \log n$.

Raten der Lösung durch Iteration

Grundidee

Wiederholtes Einsetzen der Rekursionsgleichung in sich selbst, bis man ein Muster erkennt.

Beispiel

$$\begin{aligned}
 T(n) &= 3 \cdot T(n/4) + n && | \text{Einsetzen} \\
 &= 3 \cdot (3 \cdot T(n/16) + n/4) + n && | \text{Nochmal einsetzen} \\
 &= 9 \cdot (3 \cdot T(n/64) + n/16) + 3 \cdot n/4 + n && | \text{Vereinfachen} \\
 &= 27 \cdot T(n/64) + \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot n + \left(\frac{3}{4}\right)^1 \cdot n + \left(\frac{3}{4}\right)^0 \cdot n
 \end{aligned}$$

Wir nehmen $T(1) = c$ an und erhalten: $T(n) = \sum_{i=0}^{\log_4 n - 1} \left(\frac{3}{4}\right)^i \cdot n + c \cdot n^{\log_4 3}$

Diese Aussage kann mit Hilfe der Substitutionsmethode gezeigt werden.

Raten der Lösung durch Rekursionsbäume

Grundidee

Stelle das Ineinander-Einsetzen als Baum dar, indem man Buch über das aktuelle Rekursionsargument und die nicht-rekursiven Kosten führt.

Rekursionsbaum

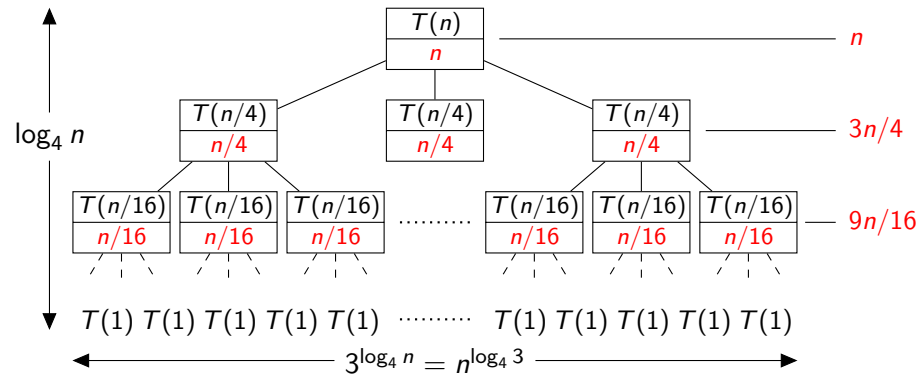
- Jeder **Knoten** stellt die Kosten eines Teilproblems dar.
 - Die Wurzel stellt die zu analysierenden Kosten $T(n)$ dar.
 - Die Blätter stellen die Kosten der Basisfälle dar, z. B. $T(0)$ oder $T(1)$.
- Wir summieren die Kosten innerhalb jeder **Ebene** des Baumes.
- Die **Gesamtkosten** := summieren über die **Kosten aller Ebenen**.

Wichtiger Hinweis

Ein Rekursionsbaum ist sehr nützlich, um eine Lösung zu raten, die dann mit Hilfe der Substitutionsmethode überprüft werden kann.

Der Baum selber reicht jedoch meistens nicht als Beweis.

Rekursionsbaum: Beispiel

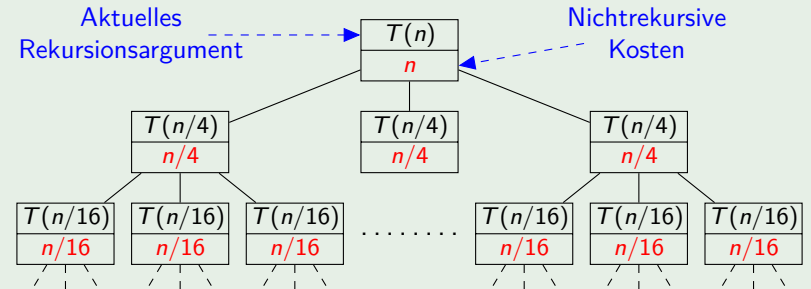


$$T(n) = \underbrace{\sum_{i=0}^{\log_4 n - 1}}_{\text{Summe über alle Ebenen}} \underbrace{\left(\frac{3}{4}\right)^i \cdot n}_{\text{Kosten pro Ebene}} + \underbrace{c \cdot n^{\log_4 3}}_{\text{Gesamtkosten für die Blätter mit } T(1) = c}$$

Rekursionsbaum: Beispiel

Beispiel

Der Rekursionsbaum von $T(n) = 3 \cdot T(n/4) + n$ sieht etwa so aus:



Rekursionsbaum: Beispiel

Eine obere Schranke für die Komplexität erhält man nun folgendermaßen:

$$\begin{aligned}
 T(n) &= \sum_{i=0}^{\log_4 n - 1} \left(\frac{3}{4}\right)^i \cdot n + c \cdot n^{\log_4 3} && | \text{ Vernachlässigen kleinerer Terme} \\
 &< \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^i \cdot n + c \cdot n^{\log_4 3} && | \text{ Geometrische Reihe} \\
 &< \frac{1}{1 - (3/4)} \cdot n + c \cdot n^{\log_4 3} && | \text{ Umformen} \\
 &< 4 \cdot n + c \cdot n^{\log_4 3} && | \text{ Asymptotische Ordnung bestimmen} \\
 &&& \text{ setze ein, dass } \log_4 3 < 1
 \end{aligned}$$

$T(n) \in O(n)$.

Korrektheit

Wir können die Substitutionsmethode benutzen, um die Vermutung zu bestätigen, dass:

$T(n) \in O(n)$ eine obere Schranke von $T(n) = 3 \cdot T(n/4) + n$ ist.

$$\begin{aligned}
 T(n) &= 3 \cdot T(n/4) + n && | \text{ Induktionshypothese} \\
 &\leq 3d \cdot n/4 + n \\
 &= \frac{3}{4}d \cdot n + n \\
 &= \left(\frac{3}{4}d + 1\right) \cdot n && | \text{ mit } d \geq 4 \text{ folgt sofort:} \\
 &\leq d \cdot n
 \end{aligned}$$

Und wir stellen fest, dass es ein n_0 gibt, sodass $T(n_0) \leq d \cdot n_0$ ist.

Das Mastertheorem

$$T(n) = b \cdot T\left(\frac{n}{c}\right) + f(n) \text{ mit } b \geq 1 \text{ und } c > 1.$$

▶ Anzahl der Blätter im Rekursionsbaum: n^E mit $E = \log b / \log c$.

Mastertheorem

Wenn	Dann
1. $f(n) \in O(n^{E-\epsilon})$ für ein $\epsilon > 0$	$T(n) \in \Theta(n^E)$
2. $f(n) \in \Theta(n^E)$	$T(n) \in \Theta(n^E \cdot \log n)$
3. $f(n) \in \Omega(n^{E+\epsilon})$ für ein $\epsilon > 0$ und $b \cdot f(n/c) \leq d \cdot f(n)$ für ein $d < 1$ und n hinreichend groß	$T(n) \in \Theta(f(n))$

▶ Bemerge, dass das Mastertheorem nicht alle Fälle abdeckt.

Mastertheorem

Allgemeines Format der Rekursionsgleichung

Eine Rekursionsgleichung für die Komplexitätsanalyse sieht meistens folgendermaßen aus:

$$T(n) = b \cdot T\left(\frac{n}{c}\right) + f(n)$$

wobei $b > 0$, $c > 1$ gilt und $f(n)$ eine gegebene Funktion ist.

Intuition:

- ▶ Das zu analysierende Problem teilt sich jeweils in b Teilprobleme auf.
- ▶ Jedes dieser Teilprobleme hat die Größe $\frac{n}{c}$.
- ▶ Die Kosten für das Aufteilen eines Problems und Kombinieren der Teillösungen sind $f(n)$.

Das Mastertheorem verstehen

In jedem der 3 Fälle wird die Funktion $f(n)$ mit $n^E = n^{\log_c b}$ verglichen.

Mastertheorem: Intuition

Wenn	Dann
1. $f(n)$ polynomial kleiner ist als n^E	$T(n) \in \Theta(n^E)$
2. $f(n)$ und n^E die gleiche Größe haben	$T(n) \in \Theta(n^E \cdot \log n)$
3. $f(n)$ ist polynomial größer als n^E und erfüllt $b \cdot f(n/c) \leq d \cdot f(n)$	$T(n) \in \Theta(f(n))$

Nicht abgedeckte Fälle:

1. $f(n)$ ist kleiner als n^E , jedoch nicht polynomiell kleiner.
2. $f(n)$ ist größer als n^E , jedoch nicht polynomiell größer.
3. $f(n)$ ist polynomiell größer als n^E , erfüllt nicht $b \cdot f(n/c) \leq d \cdot f(n)$.

Anwendung des Mastertheorems

Beispiel

$$T(n) = 4 \cdot T(n/2) + n$$

- ▶ Somit: $b = 4$, $c = 2$ und $f(n) = n$; $E = \log 4 / \log 2 = 2$.
- ▶ Da $f(n) = n \in O(n^{2-\varepsilon})$, gilt Fall 1: $T(n) \in \Theta(n^2)$

Beispiel

$$T(n) = 4 \cdot T(n/2) + n^2$$

- ▶ Somit: $b = 4$, $c = 2$ und $f(n) = n^2$; $E = \log 4 / \log 2 = 2$.
- ▶ Da $f(n) = n^2 \notin O(n^{2-\varepsilon})$, gilt Fall 1 nicht.
- ▶ Aber weil $f(n) = n^2 \in \Theta(n^2)$, gilt Fall 2: $T(n) \in \Theta(n^2 \cdot \log n)$

Das Mastertheorem ist nicht immer anwendbar

Beispiel

$$T(n) = 4 \cdot T(n/2) + \frac{n^2}{\log n}$$

- ▶ Also gilt: $b = 4$, $c = 2$ und $f(n) = n^2 / \log n$; $E = 2$.

Fall 1 ist **nicht** anwendbar:

$$n^2 / \log n \notin O(n^{2-\varepsilon}), \text{ da } f(n)/n^2 = (\log n)^{-1} \notin O(n^{-\varepsilon}).$$

Fall 2 ist **nicht** anwendbar: $n^2 / \log n \notin \Theta(n^2)$.

Fall 3 ist **nicht** anwendbar:

$$f(n) \notin \Omega(n^{2+\varepsilon}), \text{ da } f(n)/n^2 = (\log n)^{-1} \notin O(n^{+\varepsilon}).$$

⇒ Das Mastertheorem hilft hier überhaupt nicht weiter!

- ▶ Durch Substitution erhält man: $T(n) \in \Theta(n^2 \cdot \log \log n)$

Anwendung des Mastertheorems

Beispiel

$$T(n) = 4 \cdot T(n/2) + n^3$$

- ▶ Somit: $b = 4$, $c = 2$ und $f(n) = n^3$; $E = \log 4 / \log 2 = 2$.
- ▶ Wegen $E = 2$ gelten Fälle 1 und 2 offenbar **nicht**.
- ▶ Da $f(n) = n^3 \in \Omega(n^{2+\varepsilon})$ für $\varepsilon = 1$, könnte Fall 3 gelten.
- ▶ Überprüfe: gilt $f(n/2) \leq \frac{d}{4} \cdot f(n)$ für ein $d < 1$ und hinreichend grosse n ?
- ▶ Dies liefert $\frac{1}{8} n^3 \leq \frac{d}{4} \cdot n^3$, und dies gilt für alle $\frac{1}{2} \leq d < 1$ (und n)
- ▶ Somit gilt Fall 3 tatsächlich und wir folgern: $T(n) \in \Theta(n^3)$

Mastertheorem: Beweis