# Datenstrukturen und Algorithmen

## Vorlesung 1: Algorithmische Komplexität

Joost-Pieter Katoen

Lehrstuhl für Informatik 2
Software Modeling and Verification Group

http://moves.rwth-aachen.de/teaching/ss-15/dsal/

9. April 2015





## Übersicht







## Übersicht







## Algorithmen

**Algorithmus**

Eine wohldefinierte Rechenvorschrift, um ein Problem durch ein Computerprogramm zu lösen.

**Beispiel (Algorithmen)**

Quicksort, Heapsort, Lineare und Binäre Suche, Graphalgorithmen.

Löst ein Rechenproblem, beschrieben durch

- die zu verarbeitenden Eingaben (Vorbedingung / precondition) und
- die erwartete Ausgabe (Nachbedingung / postcondition),

mithilfe einer Folge von Rechenschritten.

## Beispiel Rechenproblem: Sortieren

**Beispiel**

Eingabe: Eine Folge von $n$ natürlichen Zahlen $\langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$ mit $a_i \in \mathbb{N}$.

Ausgabe: Eine Permutation (Umordnung) $\langle b_1, b_2, \ldots, b_n \rangle$ der Eingabefolge, sodass $b_1 \leqslant b_2 \leqslant \ldots \leqslant b_n$.



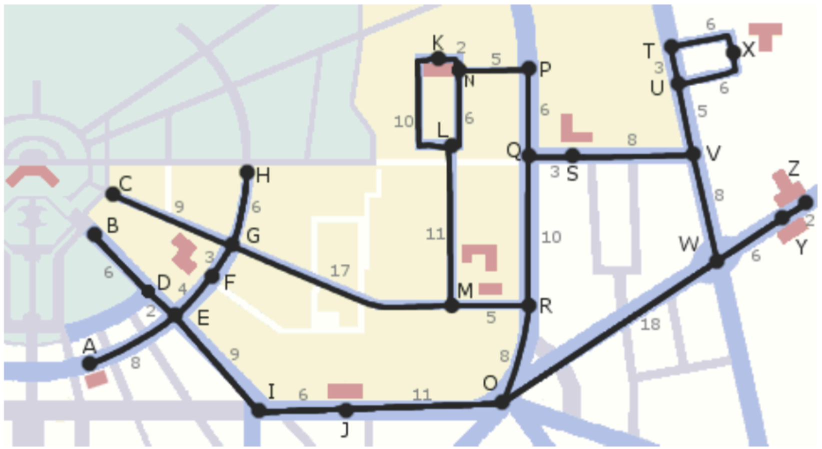


## Andere Rechenprobleme: kürzester Weg






## Andere Rechenprobleme: kürzester Weg







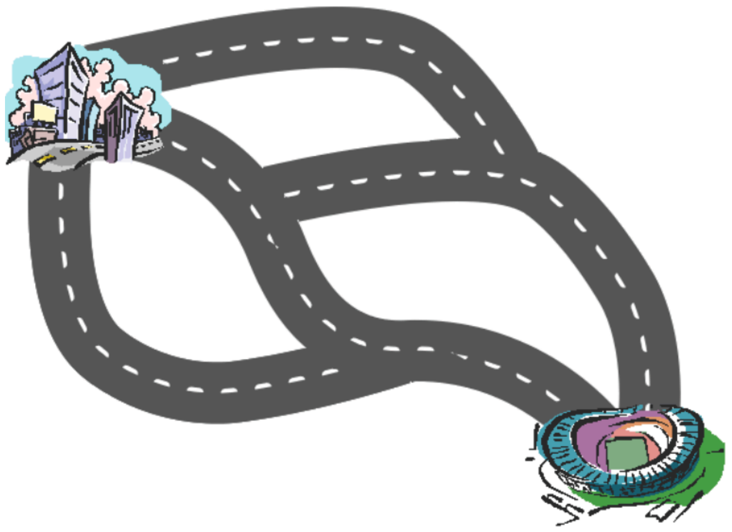

## Andere Rechenprobleme: kürzester Weg

**Beispiel (kürzester Weg)**

Eingabe:
1. Eine Straßenkarte, auf welcher der Abstand zwischen jedem Paar benachbarter Kreuzungen eingezeichnet ist,
2. eine Startkreuzung $s$ und
3. eine Zielkreuzung $z$.

Ausgabe: Ein kürzeste Weg von $s$ nach $z$.

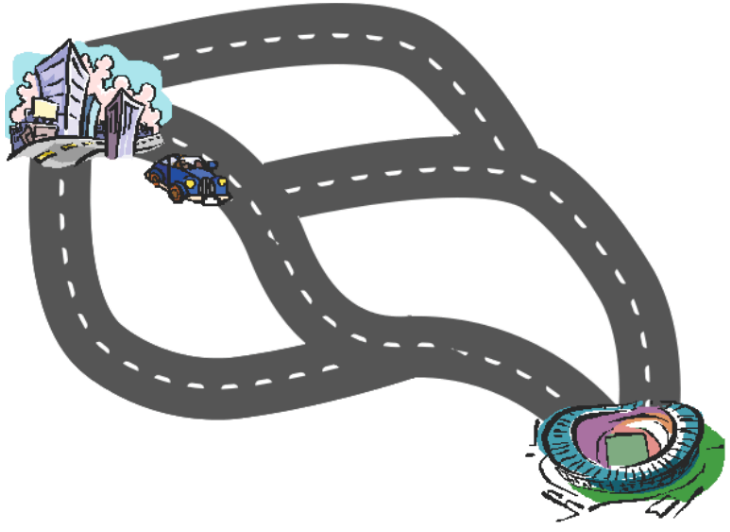
# Andere Rechenprobleme: maximale Flüsse







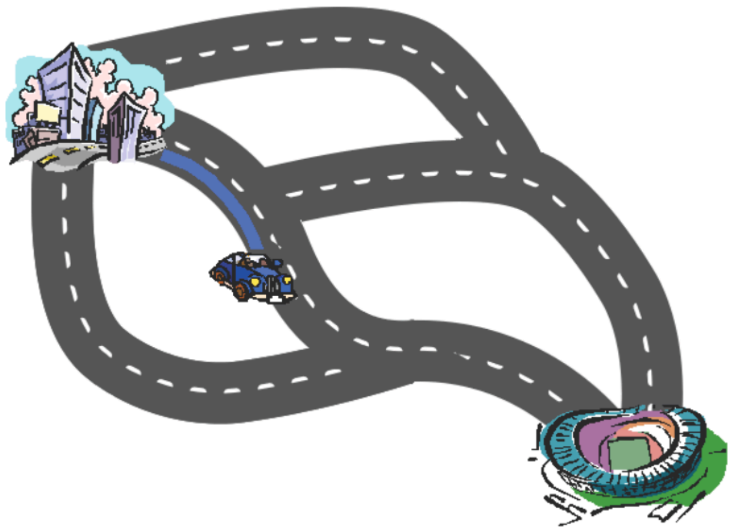
# Andere Rechenprobleme: maximale Flüsse







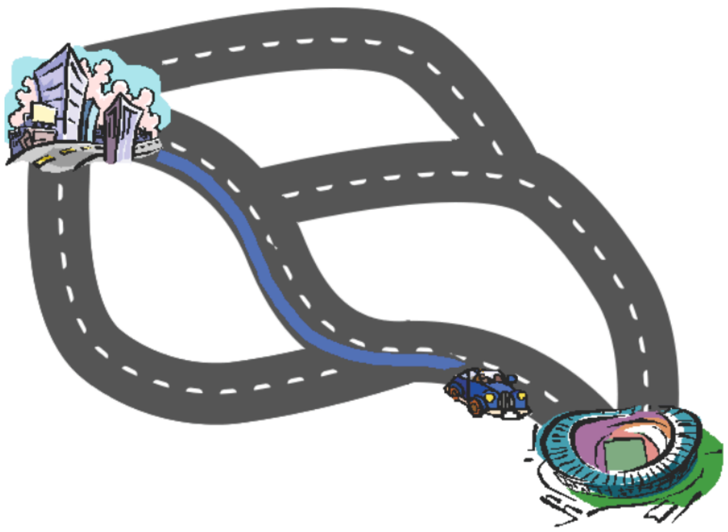
# Andere Rechenprobleme: maximale Flüsse



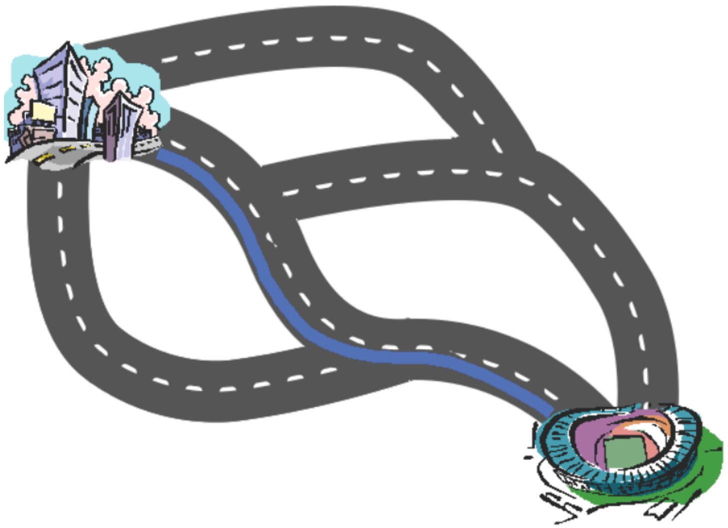




# Andere Rechenprobleme: maximale Flüsse



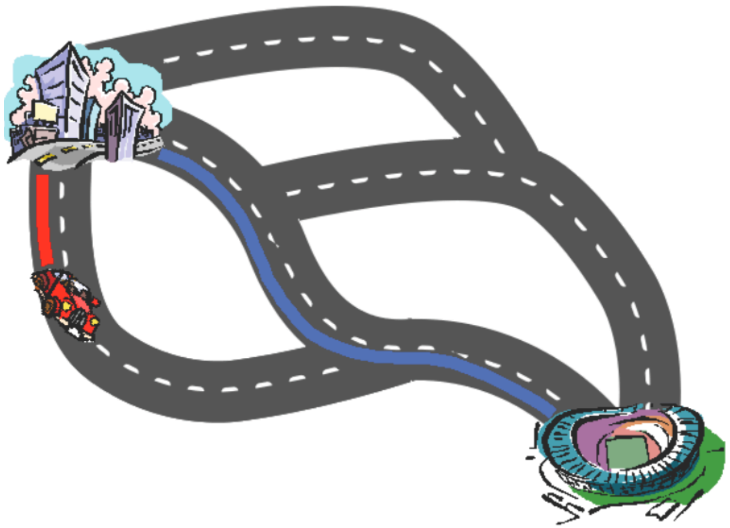
# Andere Rechenprobleme: maximale Flüsse







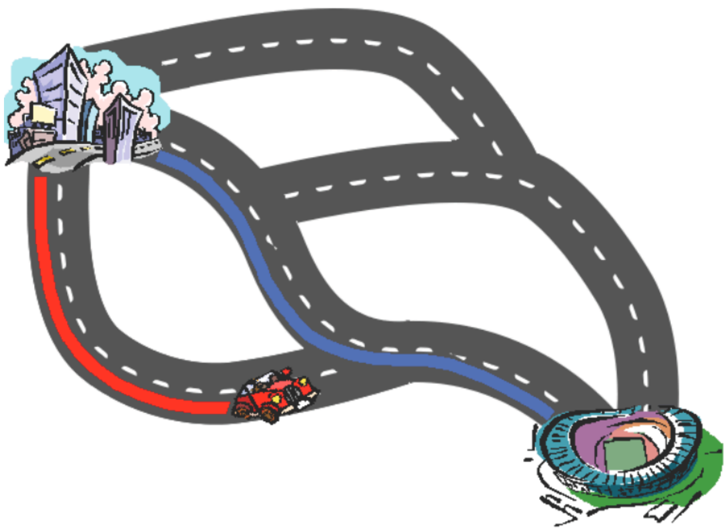
# Andere Rechenprobleme: maximale Flüsse







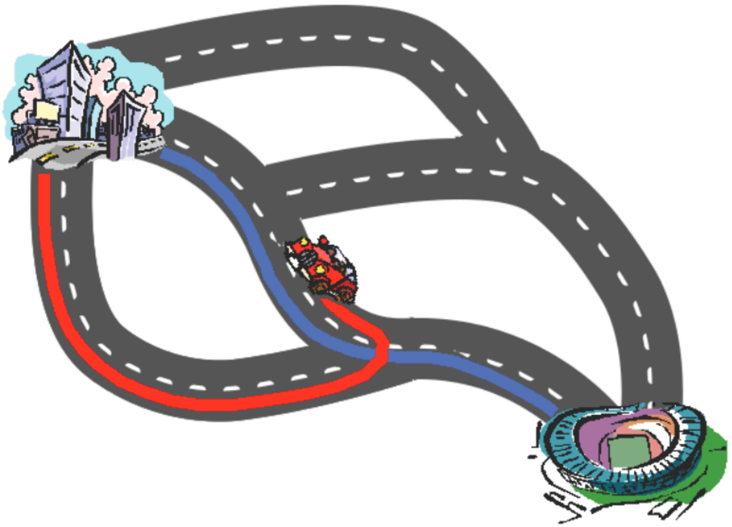
# Andere Rechenprobleme: maximale Flüsse



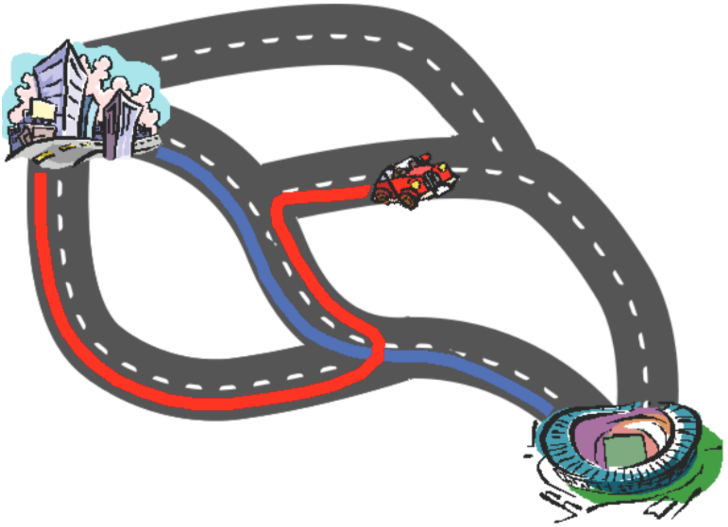




# Andere Rechenprobleme: maximale Flüsse



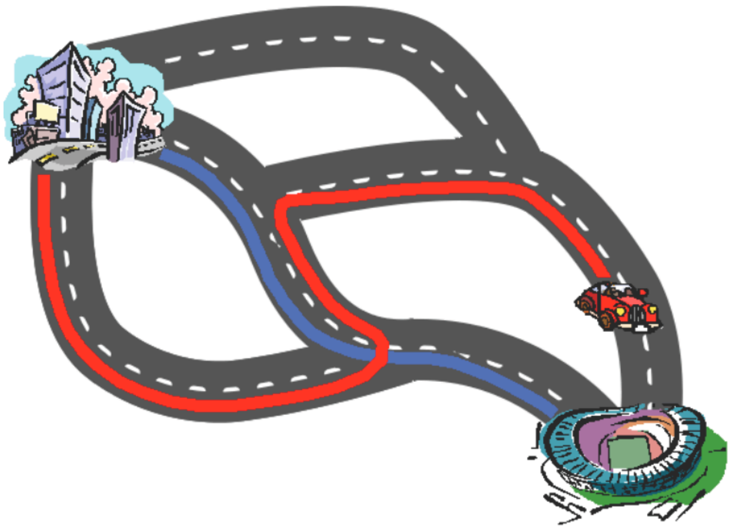
## Andere Rechenprobleme: maximale Flüsse







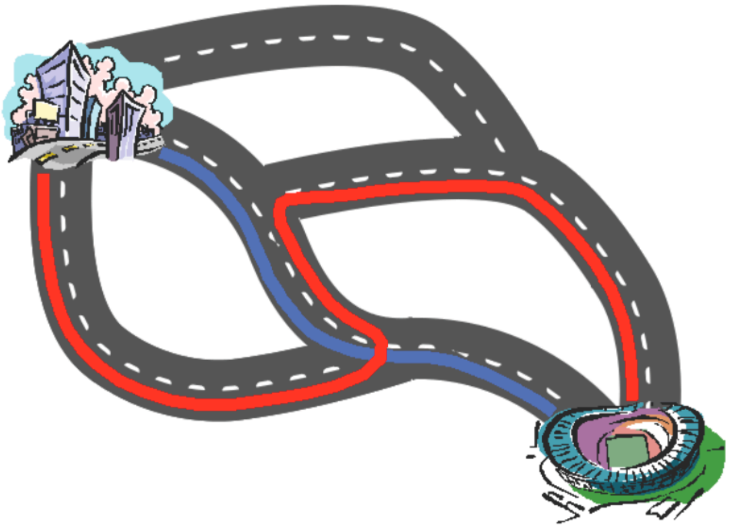
## Andere Rechenprobleme: maximale Flüsse







## Andere Rechenprobleme: maximale Flüsse







## Andere Rechenprobleme: maximale Flüsse

**Beispiel (maximale Flüsse)**

Eingabe:
1. Eine Straßenkarte, auf der die Kapazität der Straßen eingezeichnet ist,
2. eine Quelle und
3. eine Senke.

Ausgabe: Die maximale Rate, mit der Material (= Zuschauer) von der Quelle bis zur Senke (= Stadion) transportiert werden kann, ohne die Kapazitätsbeschränkungen der Straßen zu verletzen.

## Andere Rechenprobleme: das CD-Brennproblem






## Andere Rechenprobleme: das CD-Brennproblem

Betrachte alle Schallplatten von Nina Hagen:


Wie bekommen wir eine Kompilation ihrer Songs auf einige CDs?





## Andere Rechenprobleme: das CD-Brennproblem

**Beispiel (CD-Brennproblem)**

Eingabe:
1. $N \in \mathbb{N}$ Songs, Song $i$ dauert $0 < n_i \leqslant 80$ Minuten,
2. $k \in \mathbb{N}$ CDs, jeweils mit Kapazität: 80 Minuten.

Ausgabe: $k$ CDs gefüllt mit einer Auswahl der $N$ Songs, sodass
1. die Songs in chronologische Reihenfolge vorkommen und
2. die totale Dauer der (verschiedenen) ausgewählten Songs maximiert wird,

wobei ein Song komplett auf eine CD gebrannt werden soll.





## Algorithmen

**Kernpunkte**

- Korrektheit: Bei jeder Eingabeinstanz stoppt der Algorithmus mit der korrekten Ausgabe.
- Eleganz
- Effizienz: Wieviel Zeit und Speicherplatz wird benötigt?

Effiziente Algorithmen verwenden effektive Datenstrukturen.

## Datenstrukturen

**Datenstruktur**

Ein mathematisches Objekt zur Speicherung von Daten.

Man spricht von einer Struktur, da die Daten in einer bestimmten Art und Weise angeordnet und verknüpft werden, um den Zugriff auf sie und ihre Verwaltung geeignet und effizient zu ermöglichen.

**Beispiele (Datenstrukturen)**

Array, Baum, Kellerspeicher (stack), Liste,
Warteschlange (queue), Heap, Hashtabelle ...





## Effizienz von Algorithmen – Kriterien

Wichtige Kriterien sind (für eine bestimmte Eingabe):

- die benötigte Zeit, Zeitkomplexität
- der benötigte Platz. Platzkomplexität

Zeitkomplexität $\neq$ Platzkomplexität $\neq$ Komplexität des Algorithmus

**Ziel**

Beurteilung der Effizienz von Algorithmen unabhängig von

- verwendetem Computer, Programmiersprache, Fähigkeiten des Programmierers usw.





## Effizienz von Algorithmen – Elementare Operation

Die Analyse hängt von der Wahl der elementaren Operationen ab, etwa:

- „Vergleich zweier Zahlen" beim *Sortieren* eines Arrays von Zahlen.
- „Multiplikation zweier Fließkommazahlen" bei *Matrixmultiplikation*.

**Elementare Operationen**

- Anzahl der elementaren Operationen sollte eine gute Abschätzung für die Anzahl der Gesamtoperationen sein.
- Anzahl der elementaren Operationen bildet die Basis zur Bestimmung der Wachstumsrate der Zeitkomplexität bei immer längeren Eingaben.





## Effizienz von Algorithmen – Beispiele

Technologie führt nur zu Verbesserung um einen konstanten Faktor:

**Beispiel**

Selbst ein Supercomputer kann einen „schlechten" Algorithmus nicht retten: Für genügend große Eingaben gewinnt *immer* der schnellere Algorithmus auf dem langsameren Computer.

**Beispiel**

Typische Laufzeiten (bis auf einen konstanten Faktor) für Eingabelänge $n$:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $1$ | konstant | $n \cdot \log n$ | |
| $\log n$ | logarithmisch | $n^2$ | quadratisch |
| $n$ | linear | $2^n$ | exponentiell |

## Zeitkomplexität in der Praxis I

### Beispiel (Tatsächliche Laufzeiten)

| Länge $n$ | $33n$ | $46n \log n$ | $13n^2$ | $3{,}4n^3$ | $2^n$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 10 | 0,00033 s | 0,0015 s | 0,0013 s | 0,0034 s | 0,001 s |
| $10^2$ | 0,0033 s | 0,03 s | 0,13 s | 3,4 s | $4 \cdot 10^{16}$ y |
| $10^3$ | 0,033 s | 0,45 s | 13 s | 0,94 h | |
| $10^4$ | 0,33 s | 6,1 s | 1300 s | 39 d | |
| $10^5$ | 3,3 s | 1,3 m | 1,5 d | 108 y | |

Komplexität

Benötigte Zeit (s = Sekunde, h = Stunde, d = Tag, y = Jahr)

- Der Einfluss großer konstanter Faktoren nimmt mit wachsendem $n$ ab.





## Zeitkomplexität in der Praxis II

### Beispiel (Größte lösbare Eingabelänge)

| Verfügbare Zeit | $33n$ | $46n \log n$ | $13n^2$ | $3{,}4n^3$ | $2^n$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 s | 30 000 | 2000 | 280 | 67 | 20 |
| 1 m | 1 800 000 | 82 000 | 2170 | 260 | 26 |
| 1 h | 108 000 000 | 1 180 800 | 16 818 | 1009 | 32 |

Komplexität

Größte lösbare Eingabelänge

- Eine 60-fach längere Eingabe lässt sich nicht durch um den Faktor 60 längere Zeit (oder höhere Geschwindigkeit) bewältigen.





## Schnellere Computer...

Sei $N$ die größte Eingabelänge, die in fester Zeit gelöst werden kann.

### Frage

Wie verhält sich $N$, wenn wir einen $K$-mal schnelleren Rechner verwenden?

| #Operationen benötigt für Eingabe der Länge $n$ | Größte lösbare Eingabelänge |
|---|---|
| $\log n$ | $N^K$ |
| $n$ | $K \cdot N$ |
| $n^2$ | $\sqrt{K} \cdot N$ |
| $2^n$ | $N + \log K$ |





## Übersicht

## Idee

Wir betrachten einen gegebenen Algorithmus $A$.

**Worst-Case Laufzeit**

Die Worst-Case Laufzeit von $A$ ist die von $A$ maximal benötigte Anzahl elementarer Operationen auf einer *beliebigen* Eingabe der Länge $n$.

**Best-Case Laufzeit**

Die Best-Case Laufzeit von $A$ ist die von $A$ minimal benötigte Anzahl elementarer Operationen auf einer *beliebigen* Eingabe der Länge $n$.

**Average-Case Laufzeit**

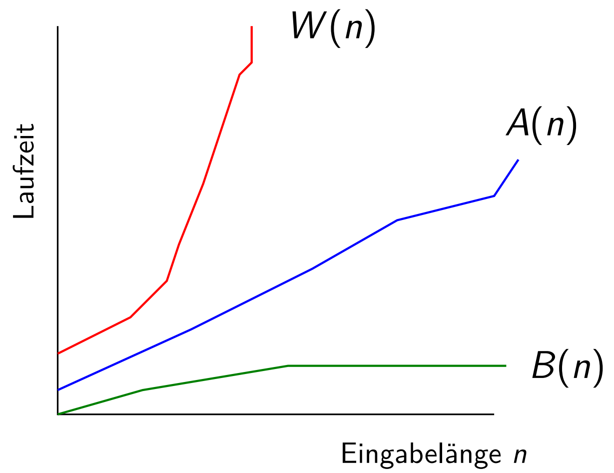
Die Average-Case Laufzeit von $A$ ist die von $A$ durchschnittlich benötigte Anzahl elementarer Operationen auf einer *beliebigen* Eingabe der Länge $n$.

Alle drei sind Funktionen: Laufzeit in Abhängigkeit von der Eingabelänge!





## Beispiel








## Formale Definition (I)

**Einige hilfreiche Begriffe**

$D_n$ = Menge aller Eingaben der Länge $n$

$t(I)$ = für Eingabe $I$ benötigte Anzahl elementarer Operationen

$\Pr(I)$ = Wahrscheinlichkeit, dass Eingabe $I$ auftritt

**Woher kennen wir:**

$t(I)$? – Durch Analyse des fraglichen Algorithmus.

$\Pr(I)$? – Erfahrung, Vermutung (z. B. „alle Eingaben treten mit gleicher Wahrscheinlichkeit auf“).





## Formale Definition (II)

**Worst-Case Laufzeit**

Die Worst-Case Laufzeit von $A$ ist die von $A$ maximal benötigte Anzahl elementarer Operationen auf einer *beliebigen* Eingabe der Länge $n$:

$$W(n) = \max\{ t(I) \mid I \in D_n \}.$$

**Best-Case Laufzeit**

Die Best-Case Laufzeit von $A$ ist die von $A$ minimal benötigte Anzahl elementarer Operationen auf einer *beliebigen* Eingabe der Länge $n$:

$$B(n) = \min\{ t(I) \mid I \in D_n \}.$$

## Formale Definition (II)

### Average-Case Laufzeit

Die Average-Case Laufzeit von $A$ ist die von $A$ durchschnittlich benötigte Anzahl elementarer Operationen auf einer *beliebigen* Eingabe der Länge $n$:

$$A(n) = \sum_{I \in D_n} \Pr(I) \cdot t(I)$$





## Lineare Suche

### Rechenproblem

Eingabe: Array `E` mit `n` Einträgen sowie das gesuchte Element `K`.
Ausgabe: Ist `K` in `E` enthalten?

```
bool linSearch(int E[], int n, int K) {
  for (int index = 0; index < n; index ++) {
    if (E[index] == K) {
      return true; // oder: return index;
    }
  }
  return false; // nicht gefunden
}
```





## Lineare Suche – Analyse

### Elementare Operation

Vergleich einer ganzen Zahl `K` mit Element `E[index]`.

### Menge aller Eingaben

$D_n$ ist die Menge aller Permutationen von $n$ ganzen Zahlen, die ursprünglich aus einer Menge $N > n$ ganzer Zahlen ausgewählt wurden.

### Zeitkomplexität

- $W(n) = n$, da $n$ Vergleiche notwendig sind, falls `K` nicht in `E` vorkommt (oder wenn `K == E[n]`).
- $B(n) = 1$, da ein Vergleich ausreicht, wenn `K` gleich `E[1]` ist.
- $A(n) \approx \frac{1}{2}n$?, da im Schnitt `K` mit etwa der Hälfte der Elemente im Array `E` verglichen werden muss? – Nein.





## Lineare Suche – Average-Case-Analyse (I)

### Zwei Szenarien

1. `K` kommt nicht in `E` vor.
2. `K` kommt in `E` vor.

### Zwei Definitionen

1. Sei $A_{K \notin E}(n)$ die Average-Case-Laufzeit für den Fall "`K` nicht in `E`".
2. Sei $A_{K \in E}(n)$ die Average-Case-Laufzeit für den Fall "`K` in `E`".

$$A(n) = \Pr\{\texttt{K in E}\} \cdot A_{K \in E}(n) + \Pr\{\texttt{K nicht in E}\} \cdot A_{K \notin E}(n)$$

## Der Fall "`K` in `E`"

- Nehme an, dass alle Elemente in `E` unterschiedlich sind.
- Damit ist die Wahrscheinlichkeit für `K == E[i]` gleich $\frac{1}{n}$.
- Die Anzahl benötigter Vergleiche im Fall `K == E[i]` ist $i+1$.
- Damit ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
A_{K\in E}(n) &= \sum_{i=0}^{n-1} \Pr\{\texttt{K == E[i]} \mid \texttt{K in E}\} \cdot t(\texttt{K == E[i]}) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{1}{n}\right) \cdot (i+1) \\
&= \left(\frac{1}{n}\right) \cdot \sum_{i=0}^{n-1} (i+1) \\
&= \left(\frac{1}{n}\right) \cdot \frac{n(n+1)}{2} \\
&= \frac{n+1}{2}.
\end{aligned}
$$





## Herleitung

$$
\begin{aligned}
A(n) &= \Pr\{\texttt{K in E}\} \cdot A_{K\in E}(n) + \Pr\{\texttt{K nicht in E}\} \cdot A_{K\notin E}(n) \\
&\quad \Big|\ A_{K\in E}(n) = \frac{n+1}{2} \\
&= \Pr\{\texttt{K in E}\} \cdot \frac{n+1}{2} + \Pr\{\texttt{K nicht in E}\} \cdot A_{K\notin E}(n) \\
&\quad \Big|\ \Pr\{\text{nicht } B\} = 1 - \Pr\{B\} \\
&= \Pr\{\texttt{K in E}\} \cdot \frac{n+1}{2} + (1 - \Pr\{\texttt{K in E}\}) \cdot A_{K\notin E}(n) \\
&\quad \Big|\ A_{K\notin E}(n) = n \\
&= \Pr\{\texttt{K in E}\} \cdot \frac{n+1}{2} + (1 - \Pr\{\texttt{K in E}\}) \cdot n \\
&= n \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\Pr\{\texttt{K in E}\}\right) + \frac{1}{2}\Pr\{\texttt{K in E}\}
\end{aligned}
$$





## Lineare Suche – Average-Case-Analyse

**Endergebnis**

Die Average-Case-Zeitkomplexität der linearen Suche ist:

$$A(n) = n \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\Pr\{\texttt{K in E}\}\right) + \frac{1}{2}\Pr\{\texttt{K in E}\}$$

**Beispiel**

Wenn $\Pr\{\texttt{K in E}\}$

- $= 1$, dann $A(n) = \frac{n+1}{2}$, d. h. etwa 50% von `E` ist überprüft.
- $= 0$, dann $A(n) = n = W(n)$, d. h. `E` wird komplett überprüft.
- $= \frac{1}{2}$, dann $A(n) = \frac{3 \cdot n}{4} + \frac{1}{4}$, d. h. etwa 75% von `E` wird überprüft.





## Übersicht

## Übersicht (Teil I)

1. Algorithmische Komplexität
2. Asymptotische Effizienz
3. Elementare Datenstrukturen
4. Suchen
5. Rekursionsgleichungen
6. Sortieren: in-situ, Mergesort, Heapsort, Quicksort





## Übersicht (Teil II)

1. Binäre Suchbäume
2. Rot-Schwarz-Bäume
3. Hashing
4. Elementare Graphenalgorithmen
5. Minimale Spannbäume
6. Kürzeste-Pfade-Algorithmen
7. Maximale Flüsse
8. Dynamische Programmierung
9. Algorithmische Geometrie





## Literatur

Die Vorlesung orientiert sich im Wesentlichen an diesem Buch:

Thomas H. Cormen, Charles E. Leiserson,
Ronald Rivest, Clifford Stein:

**Algorithmen - Eine Einführung**

R. Oldenbourg Verlag , 2. oder 3. Auflage.






## Wichtige Termine

**Vorlesungstermine**

Vorlesung: Do. 10:15–11:45, Aula (Hauptgebäude)
Fr. 10:15–11:45, Großer Hörsaal (Audimax)

Keine Vorlesung am 17.04., 01.05., 14.05., 04.06., 17.07.

Letzte Vorlesung am 16. Juli 2015

Frontalübung: Mi. 12:15–13:45, Aula (Hauptgebäude)
Am 22.04. und 20.05. sind Vorlesung (23.04. bzw. 22.05.) und Frontalübung getauscht

Erste Frontalübung: Do. 23. April

# Übungsbetrieb

## Übungsgruppen

- 16 Übungsgruppen: verschiedene Uhrzeiten Mo.–Fr.
- Spezialübung für Lehramtsstudenten und CES Studierende
- 2–3 Übungsgruppen für Erstsemester
- Koordinatoren: Christian Dehnert, Friedrich Gretz, Benjamin Kaminski und Thomas Ströder.

## Anmeldung für die Übungsgruppen

Anmeldung zum Übungsbetrieb über Web-link

`https://aprove.informatik.rwth-aachen.de/dsal15/`

bis **Mittwoch, 15. April 2015, 12:15 Uhr (Aachener Zeit).**





# Übungsbetrieb

## Wichtige Termine

| | |
|---|---|
| 0. Übungszettel: | korrekte Anmeldung für den Übungsbetrieb |
| Abgabe 0. Übungszettel: | 15. April 2015 |
| 1.Übungszettel: | 15. April 2015 |
| Abgabe 1. Übungszettel: | Mittwoch, 29. April 2015 |
| Abgabe Übungszettel: | Mittwochs (i.d.R. zwei Wochen später) vor 12:15 Uhr im Sammelkasten |
| 2.Übungszettel: | 22. April 2015 |
| Abgabe 2. Übungszettel: | Mittwoch, 6. Mai 2015 etc. |
| Frontalübung: | Mittwoch, 12:15–13:45 ab 23. April 2015 (Do.), erster Termin getauscht mit Vorlesung |
| Übungsgruppen: | Montag–Freitag, (fast) jederzeit ab 20. April |
| Präsenzübung: | Mittwoch, 03. Juni 2015 (abends) |





# Prüfung

Die Prüfung ist eine schriftliche Klausur von 120 Minuten.

## Zulassungskriterium Klausur

1. Mindestens 50% aller in den Übungen erreichbaren Punkte bis PÜ
2. Mindestens 50% aller in den Übungen erreichbaren Punkte ab PÜ
3. Mindestens 50% der in der Präsenzübung (PÜ) erreichbaren Punkte.

CES-Studenten brauchen kein Zulassungskriterium zu erfüllen.

## Bonusregelung

Bei 75% in allen drei Punkten: eine Notenstufe höher (außer bei 1.0 und 5.0).





# Wichtige Termine

## Wichtige Termine

| | |
|---|---|
| Präsenzübung: | Mittwoch, 3. Juni 2015 (abends) |
| Klausur: | Dienstag, 4. August 2015 (morgens) |
| Wiederholungsklausur: | Montag, 14. September 2015 (nachmittags) |

Anmeldung zur Prüfung über CAMPUS-Office bis **22.05., 23:59 Uhr**.

# Softwarewettbewerb

## Idee

- Praktische Anwendung der Vorlesungsinhalte
- Konkret: Entwurf und Implementierung einer Datenstruktur

## Dauer

- Start: (voraussichtlich) 1. Juni 2015
- Ende: 5. Juli 2015

## Warum?

- Klausurvorbereitung
- Spaß, (endloser) Ruhm
- kleine Sachpreise





# Sonstiges

## Mehr Information

- Webseite: `http://moves.rwth-aachen.de/teaching/ss-15/dsal/`
- E-Mail: `dsal15@i2.informatik.rwth-aachen.de`

## Nächste Vorlesung

Freitag 10. April,10:15.