Datenstrukturen und Algorithmen

Vorlesung 8: Heapsort (K6)

Joost-Pieter Katoen

Lehrstuhl für Informatik 2
Software Modeling and Verification Group

http://moves.rwth-aachen.de/teaching/ss-15/dsal/

7. Mai 2015

Übersicht

Übersicht

Heaps

Heap (Haufen)

Ein Heap ist ein Binärbaum, der Elemente mit Schlüsseln enthält und in ein Array eingebettet ist. Die Heap-Bedingung für *Max-Heaps* fordert:

- Der Schlüssel eines Knotens ist stets größer als (bzw. mindestens so groß wie) die Schlüssel seiner Kinder.

Weiter gilt:

- Alle Ebenen, abgesehen von evtl. der untersten, sind komplett gefüllt.
- Die Blätter befinden sich damit alle auf einer (höchstens zwei) Ebene(n).
- Die Blätter der untersten Ebene sind linksbündig angeordnet.

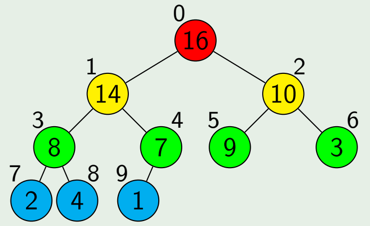
Arrayeinbettung eines Heaps

Arrayeinbettung

Das Array a wird wie folgt als Binärbaum aufgefasst:

- Die Wurzel liegt in `a[0]`.
- Das linke Kind von `a[i]` liegt in `a[2 * i + 1]`.
- Das rechte Kind von `a[i]` liegt in `a[2 * i + 2]`.

Beispiel



16	14	10	8	7	9	3	2	4	1
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

- Durch die möglichst vollständige Füllung der Ebenen werden „Löcher“ im Array vermieden.
- Vergrößert man den Baum um ein Element, so wird das Array gerade um ein Element länger.

Heaps – Eigenschaften

Lemma

Vergrößert man den Schlüssel der Wurzel, dann bleibt der Baum ein Heap.

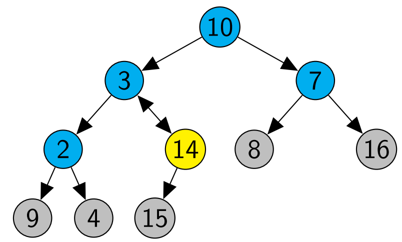
Lemma

Jedes Array „ist ein Heap“ ab Position $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

- Ein Heap hat $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ innere Knoten.

Übersicht

Naiver Heapaufbau



10	3	7	2	14	8	16	9	4	15

Heapaufbau, naiv

Der Heap wird von oben nach unten (top-down) aufgebaut, indem

- ein neues Element möglichst weit links angefügt wird und
- rekursiv nach oben getauscht wird, solange es größer als sein Elternknoten ist.

Naiver Heapaufbau – Algorithmus und Analyse

```
void bubble(int E[], int pos) {
  while (pos > 0) {
    int parent = (pos - 1) / 2;
    if (E[parent] > E[pos]) {
      break;
    }
    swap(E[parent], E[pos]);
    pos = parent;
  }
}
```

Die Höhe k eines Heaps mit n Elementen ist beschränkt durch:

$$n \leqslant 2^{k+1} - 1 \qquad \Rightarrow \qquad k = \lfloor \log_2(n) \rfloor$$

- Damit kostet jedes Einfügen $k \approx \log_2(n)$ Vergleiche.

⇒ Zum Aufbau eines Heaps mit n Elementen benötigt man $\Theta(n \cdot \log(n))$ Vergleiche.

Es geht effizienter: `heapify` (auch: sink, fixheap) [Floyd 1964]

Heapify – Strategie

Betrachte `E[i]` unter der Annahme, dass der rechte und linke Teilbaum bereits ein Heap ist.

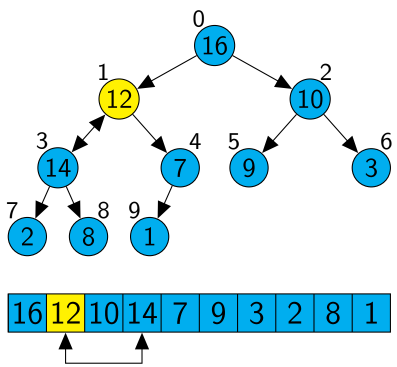
- `E[i]` kann kleiner als seine Kinder sein.
- Wir wollen die beiden Teilbäume – Heaps – zusammen mit `E[i]` zu einem (Gesamt-)Heap verschmelzen.
- Dazu lassen wir `E[i]` in den Heap hineinsinken, sodass der Teilbaum mit Wurzel `E[i]` ein Heap ist.

Heapify

- Finde das Maximum der Werte `E[i]` und seiner Kinder.
- Ist `E[i]` bereits das größte Element, dann ist dieser gesamte Teilbaum auch ein Heap. Fertig.
- Andernfalls tausche `E[i]` mit dem größten Element und führe Heapify in diesem Unterbaum weiter aus.

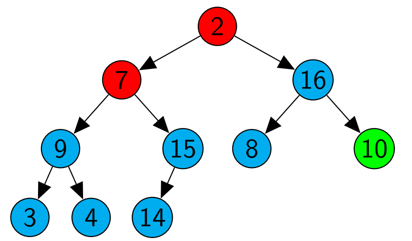
Heapify – Algorithmus und Beispiel

```
void heapify(int E[], int n, int pos) {
  int next = 2 * pos + 1;
  while (next < n) {
    if (next + 1 < n &&
        E[next + 1] > E[next]) {
      next = next + 1;
    }
    if (E[pos] >= E[next]) {
      break;
    }
    swap(E[pos], E[next]);
    pos = next;
    next = 2 * pos + 1;
  }
}
```



Heapaufbau – Algorithmus und Beispiel

Strategie: Wandle das Array von unten nach oben (bottom-up) in einen Heap um.




```
void buildHeap(int E[]) {
  for (int i = E.length / 2 - 1; i >= 0; i--) {
    heapify(E, E.length, i);
  }
}
```

Nach jedem Aufruf von `heapify(E, E.length, i)` sind die Knoten `i`, ..., `E.length - 1` schon Wurzeln von Heaps.

Konstruktion eines Heaps

Lemma

Der Algorithmus `buildHeap` *ist korrekt und terminiert.*

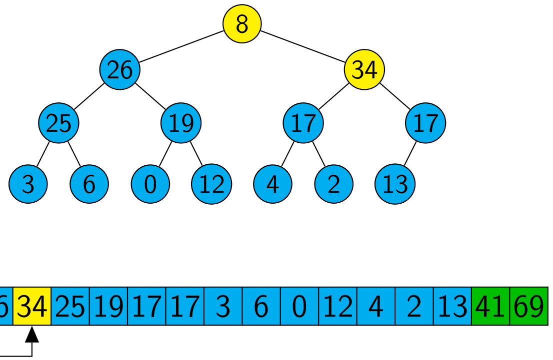
- Initialisierung: Jeder Knoten $i = \lfloor n/2 \rfloor,\ \lfloor n/2 \rfloor + 1, \ldots$ ist ein Blatt und damit Wurzel eines trivialen Heaps.
- Schleifeninvariante: Zu Beginn der `for`-Schleife ist jeder Knoten $i{+}1, \ldots, E.length$ die Wurzel eines Heaps.
- In jeder Iteration sind alle Kinder des Knotens i bereits Wurzeln eines Heaps (Schleifeninvariante).

$\Rightarrow$ Bedingung für den Aufruf von `heapify` ist erfüllt.

- Dekrementierung von i stellt Schleifeninvariante wieder her.
- Terminierung: Bei $i = 0$ ist gemäß Schleifeninvariante jeder Knoten $1, 2, \ldots, n$ die Wurzel eines Heaps.

Übersicht

Heapsort – Algorithmus und Beispiel




```
void heapSort(int E[]) {
  buildHeap(E);
  for (int i = E.length - 1; i > 0; i--) {
    swap(E[0], E[i]);
    heapify(E, i, 0);
  }
}
```


Heapsort – Analyse

- Die Worst-Case Komplexität von *Heapify* ist maximal $2 \cdot \lfloor \log_2(n) \rfloor$ für n Knoten.
  - für einen Heap mit Level k, gibt es $2 \cdot k$ Vergleiche im Worst-Case
- Die Worst-Case Komplexität von *buildHeap* ist $\Theta(n)$
  (Beweis: spätere Folie)
- Für Heapsort erhalten wir somit:

$$\begin{aligned} W(n) &= \left(\sum_{i=1}^{n-1} 2 \cdot \lfloor \log_2(i) \rfloor \right) + n \\ &\leqslant 2 \cdot \left(\sum_{i=1}^{n-1} \log_2(n) \right) + n \\ &= 2 \cdot (n-1) \cdot \log_2(n) + n \end{aligned}$$

$$\Rightarrow W(n) \in \mathcal{O}(n \cdot \log(n))$$

- Zusätzlicher Speicherplatzbedarf ist konstant (lokale Variablen).

Heapsort – Heapeigenschaften

Lemma

Ein n-elementiger Heap hat die Höhe $\lfloor \log_2(n) \rfloor$.

Lemma

Ein Heap hat maximal $\lceil n/2^{h+1} \rceil$ *Knoten mit der Höhe h.*

Beweise siehe Übung 4.

Heapsort – Komplexitätsanalyse

Die Worst-Case Komplexität von *buildHeap* ist $\Theta(n)$
Beweis:

- Die Laufzeit von *Heapify* für einen Knoten der Höhe h ist in $\mathcal{O}(h)$.
- $\lceil n/2^{h+1} \rceil$ = Anzahl der Knoten mit Höhe h.
  Daraus folgt für *buildHeap*:

$$\begin{aligned}\sum_{h=0}^{\lfloor \log_2(n) \rfloor} \left\lceil \frac{n}{2^{h+1}} \right\rceil \mathcal{O}(h) &= \mathcal{O}\left(n \sum_{h=0}^{\lfloor \log_2(n) \rfloor} \frac{h}{2^h} \right) \quad \left|\ \sum_{h=0}^{\infty} \frac{h}{2^h} = \frac{1/2}{(1-1/2)^2} = 2 \right. \\ &= \mathcal{O}\left(n \sum_{h=0}^{\infty} \frac{h}{2^h} \right) \\ &= \mathcal{O}(n)\end{aligned}$$

Heapsort – Zusammenfassung

- Heapsort sortiert in $\mathcal{O}(n \cdot \log(n))$.
- Heapsort ist ein in-place Algorithmus.
- Heapsort ist nicht stabil.

Übersicht

Erinnerung: Die Prioritätswarteschlange (I)

- Betrachte Elemente, die mit einem Schlüssel (key) versehen sind.
- Jeder Schlüssel sei höchstens an ein Element vergeben.
- Schlüssel werden als Priorität betrachtet.
- Die Elemente werden nach ihrer Priorität sortiert.

Erinnerung: Die Prioritätswarteschlange (II)

Prioritätswarteschlange (priority queue)

- `void insert(PriorityQueue pq, Element e, int k)` fügt das Element `e` mit dem Schlüssel `k` in `pq` ein.
- `Element getMin(PriorityQueue pq)` gibt das Element mit dem kleinsten Schlüssel zurück; benötigt nicht-leere `pq`.
- `void delMin(PriorityQueue pq)` entfernt das Element mit dem kleinsten Schlüssel; benötigt nicht-leere `pq`.
- `Element getElt(PriorityQueue pq, int k)` gibt das Element `e` mit dem Schlüssel `k` aus `pq` zurück; `k` muss in `pq` enthalten sein.
- `void decrKey(PriorityQueue pq, Element e, int k)` setzt den Schlüssel von Element `e` auf `k`; `e` muss in `pq` enthalten sein.
  `k` muss außerdem kleiner als der bisherige Schlüssel von `e` sein.

Mit Heaps ist eine effiziente Implementierung möglich.

Drei Prioritätswarteschlangenimplementierungen

	Implementierung		
Operation	unsortiertes Array	sortiertes Array	Heap
`isEmpty(pq)`	$\Theta(1)$	$\Theta(1)$	$\Theta(1)$
`insert(pq,e,k)`	$\Theta(1)$	$\Theta(n)^*$	$\Theta(\log(n))$
`getMin(pq)`	$\Theta(n)$	$\Theta(1)$	$\Theta(1)$
`delMin(pq)`	$\Theta(n)^*$	$\Theta(1)$	$\Theta(\log(n))$
`getElt(pq,k)`	$\Theta(n)$	$\Theta(\log(n))^\dagger$	$\Theta(n)$
`decrKey(pq,e,k)`	$\Theta(1)$	$\Theta(n)^*$	$\Theta(\log(n))$

*Beinhaltet das Verschieben aller Elemente „rechts“ von `k`.
†Mittels binärer Suche.