

# Datenstrukturen und Algorithmen

## Vorlesung 6: Sortieren (K2)

Joost-Pieter Katoen

Lehrstuhl für Informatik 2  
Software Modeling and Verification Group

<http://moves.rwth-aachen.de/teaching/ss-15/dsa1/>

30. April 2015



## Übersicht

- 1 **Sortieren - Einführung**
  - Bedeutung des Sortierens
  - Dutch National Flag Problem
- 2 Sortieren durch Einfügen
- 3 Mergesort
  - Das Divide-and-Conquer Paradigma
  - Mergesort
- 4 Effizienteres Sortieren?

## Übersicht

- 1 **Sortieren - Einführung**
  - Bedeutung des Sortierens
  - Dutch National Flag Problem
- 2 Sortieren durch Einfügen
- 3 **Mergesort**
  - Das Divide-and-Conquer Paradigma
  - Mergesort
- 4 Effizienteres Sortieren?

## Die Bedeutung des Sortierens

### Sortieren ist ein wichtiges Thema

- ▶ Sortieren wird häufig benutzt und hat viele Anwendungen.
- ▶ Sortierverfahren geben Ideen, wie man Algorithmen verbessern kann.
- ▶ Geniale und optimale Algorithmen wurden gefunden.
- ▶ Neben der Funktionsweise der Algorithmen widmen wir uns vor allem der **Laufzeitanalyse**.

## Anwendungen des Sortierens

### Beispiel (Suchen)

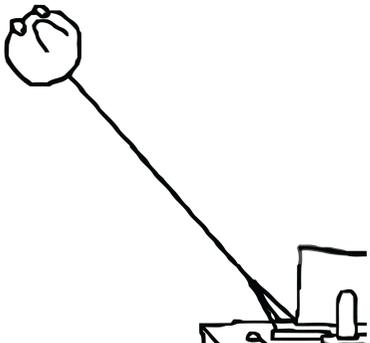
- ▶ Schnellere Suche ist die wohl häufigste Anwendung des Sortierens.
- ▶ Binäre Suche findet ein Element in  $O(\log n)$ .

### Beispiel (Engstes Paar (closest pair))

- ▶ Gegeben seien  $n$  Zahlen. Finde das Paar mit dem geringstem Abstand.
- ▶ Nach dem Sortieren liegen die Paare nebeneinander. Der Aufwand ist dann noch  $O(n)$ .

## Sortieren ist nicht trivial!

TimSort: Python, Java (OpenJDK + Oracle), Android



OpenJDK's `java.util.Collection.sort()` is broken:  
The good, the bad and the worst case\*

Stijn de Gouw<sup>1,2</sup>, Jurriaan Rot<sup>3,1</sup>, Frank S. de Boer<sup>1,3</sup>, Richard Bubel<sup>4</sup>, and Reiner Hähnle<sup>4</sup>

<sup>1</sup> CWI, Amsterdam, The Netherlands

<sup>2</sup> SDL, Amsterdam, The Netherlands

<sup>3</sup> Leiden University, The Netherlands

<sup>4</sup> Technische Universität Darmstadt, Germany

**Abstract.** We investigate the correctness of TimSort, which is the main sorting algorithm provided by the Java standard library. The goal is functional verification with mechanical proofs. During our verification attempt we discovered a bug which causes the implementation to crash. We characterize the conditions under which the bug occurs, and from this we derive a bug-free version that does not compromise the performance. We formally specify the new version and mechanically verify the absence of this bug with KeY, a state-of-the-art verification tool for Java.

### Bekannte Fehler [\[Bearbeiten\]](#)

Im Februar 2015 stellte der Amsterdamer Informatiker Stijn de Gouw fest, dass alle Implementierungen des Timsort-Algorithmus einen Fehler enthalten.<sup>[6]</sup> Dieser Fehler hat keine praktischen Auswirkungen, da er nur auf Rechnern mit sehr viel Speicher auftreten kann, die zurzeit nicht existieren. Dennoch wurde der Fehler in Python<sup>[7]</sup> und Java<sup>[8]</sup> behoben.

## Noch einige Anwendungen

### Beispiel (Eigenschaften von Datenobjekten)

- ▶ Sind alle  $n$  Elemente einzigartig oder gibt es Duplikate?
- ▶ Das  $k$ -t größte Element einer Menge?

### Beispiel (Textkompression (Entropiekodierung))

- ▶ Sortiere die Buchstaben nach Häufigkeit des Auftretens um sie dann effizient zu kodieren (d.h. mit möglichst kurzen Bitfolgen).

## Einige Hilfsbegriffe

### Permutation

Eine **Permutation** einer Menge  $A = \{a_1, \dots, a_n\}$  ist eine bijektive Abbildung  $\pi : A \rightarrow A$ .

### Totale Ordnung

Sei  $A = \{a_1, \dots, a_n\}$  eine Menge. Die binäre Relation  $\leq \subseteq A \times A$  ist eine **totale Ordnung** (auf  $A$ ) wenn für alle  $a_i, a_j, a_k \in A$  gilt:

1. **Antisymmetrie:**  $a_i \leq a_j$  und  $a_j \leq a_i$  impliziert  $a_i = a_j$ .
2. **Transitivität:**  $a_i \leq a_j$  und  $a_j \leq a_k$  impliziert  $a_i \leq a_k$ .
3. **Totalität:**  $a_i \leq a_j$  oder  $a_j \leq a_i$ .

### Beispiel

Die lexikographische Ordnung von Zeichenketten und die numerische Ordnung von Zahlen sind totale Ordnungen.

## Sortierproblem

### Das Sortier-Problem

- Eingabe:**
1. Ein Array  $E$  mit  $n$  Einträgen.
  2. Die Einträge gehören zu einer Menge  $A$  mit totaler Ordnung  $\leq$ .

**Ausgabe:** Ein Array  $F$  mit  $n$  Einträgen, so dass

1.  $F[1], \dots, F[n]$  eine **Permutation** von  $E[1], \dots, E[n]$  ist
2. Für alle  $0 < i < n$  gilt:  $F[i] \leq F[i+1]$ .

### Annahmen dieser Vorlesung

- ▶ Die zu sortierende Sequenz ist als **Array** organisiert, nicht als Liste.
- ▶ Die Elementaroperation ist ein Vergleich von Schlüssel.

## Dutch National Flag Problem (I)



## Sortieralgorithmen

### Beispiel (Einige Sortieralgorithmen)

Insertionsort, Bubblesort, Shellsort, Mergesort, Heapsort, Quicksort, Countingsort, Bucketsort, Radixsort, Stoogesort, Cocktailsort, Bogosort uvm.

### Stabilität

Ein Sortieralgorithmus ist **stabil** wenn er die Reihenfolge der Elemente, deren Sortierschlüssel gleich sind, bewahrt.

Wenn z.B. eine Liste alphabetisch sortierter Personendateien nach dem Geburtsdatum neu sortiert wird, dann bleiben unter einem **stabilen** Sortierverfahren alle Personen mit gleichem Geburtsdatum alphabetisch sortiert.

Wir werden erst einen **einfachen Sortieralgorithmus** betrachten.

## Dutch National Flag Problem (II)

### Beispiel (Das niederländische Flaggen-Problem [Dijkstra, 1972])

- Eingabe:**
1. Ein Array  $E$  mit  $n$  Einträgen, wobei für alle  $0 < i \leq n$ 
    - $E[i] == \text{rot}$ ,  $E[i] == \text{blau}$  oder
    - $E[i] == \text{weiss}$
  2. Ordnung:  $\text{rot} < \text{weiss} < \text{blau}$

**Ausgabe:** Ein sortiertes Array mit den Einträgen aus  $E$ .

Erwünschte Worst-Case Zeitkomplexität:  $\Theta(n)$ .

Erwünschte Worst-Case Speicherkomplexität:  $\Theta(1)$ .

## Dutch National Flag Problem (III)

### Hauptidee

Zerlege das Array  $E$  in 4 Regionen:

(1)  $0 < i \leq r$ , (2)  $r < i < u$ , (3)  $u \leq i < b$ , und (4)  $b \leq i \leq n$

für die Hilfsvariablen  $r$ ,  $u$  und  $b$ , so dass folgende Invariante gilt:

- $E[1], \dots, E[r]$  ist die **“rote”** Region, d.h. für alle  $0 < i \leq r$   $E[i] == \text{rot}$ .
- $E[r+1], \dots, E[u-1]$  ist die **“weiße”** Region, d.h. für alle  $r < i < u$   $E[i] == \text{weiss}$ .
- $E[u], \dots, E[b-1]$  ist **unbekannte** Region, d.h. für alle  $u \leq i < b$   $E[i] == \text{rot}$  oder  $E[i] == \text{weiss}$  oder  $E[i] == \text{blau}$ .
- $E[b], \dots, E[n]$  ist die **“blaue”** Region, d. h. für alle  $b \leq i \leq n$   $E[i] == \text{blau}$ .

Arrayelemente können mit der `swap`-Operation vertauscht werden.

## Dutch National Flag Problem (V)

### Speicherkomplexität

Die Worst-Case Speicherkomplexität vom DNF-Algorithmus ist  $\Theta(1)$ , da die einzigen extra Variablen  $r$ ,  $u$  und  $b$  sind.

DNF ist **in-place**, d. h. der Algorithmus arbeitet ohne zusätzlichen Speicherplatz.

### Zeitkomplexität

Betrachte als elementare Operationen Vergleiche der Form  $E[i] == \dots$

Die Worst-Case Zeitkomplexität ist  $\Theta(n)$ , da:

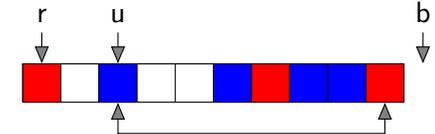
- in jedem Durchlauf werden konstant viele Vergleiche durchgeführt
- die Anzahl der Durchläufe ist  $\Theta(n)$ , da in jedem Durchlauf die Größe des unbekanntes Gebiets  $b - u$  um eins verkleinert wird.

## Dutch National Flag Problem (IV)

```

1 void DutchNationalFlag(Color E[], int n) {
2   int r = 0, b = n + 1; // rote und blaue Regionen sind leer
3   int u = 1; // weiße Region ist leer, die unbekannte == E
4   while (u < b) {
5     if (E[u] == rot) {
6       swap(E[r + 1], E[u]);
7       r = r + 1; // vergrößere die rote Region
8       u = u + 1; // verkleinere die unbekannte Region
9     }
10    if (E[u] == weiss) {
11      u = u + 1;
12    }
13    if (E[u] == blau) {
14      swap(E[b - 1], E[u]);
15      b = b - 1; // vergrößere die blaue Region
16    }
17  }
18 }

```

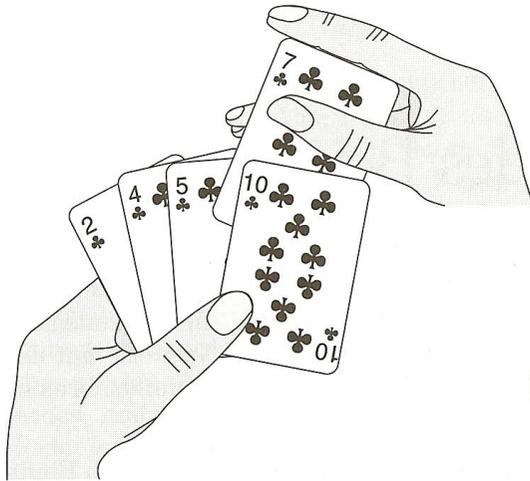


Frage: Ist DNF-Algorithmus ein **stabiles** Sortierverfahren? Antwort: **Nein**.

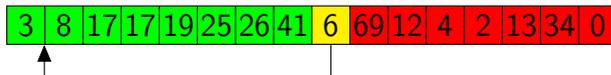
## Übersicht

- Sortieren - Einführung
  - Bedeutung des Sortierens
  - Dutch National Flag Problem
- Sortieren durch Einfügen
- Mergesort
  - Das Divide-and-Conquer Paradigma
  - Mergesort
- Effizienteres Sortieren?

## Sortieren durch Einfügen – Insertionsort



## Insertionsort – Animation und Algorithmus



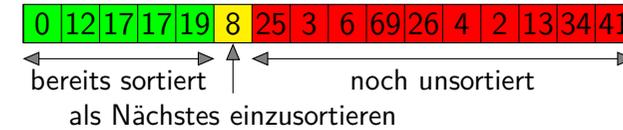
```

1 void insertionSort(int E[]) {
2   int i,j;
3   for (i = 1; i < E.length; i++) {
4     int v = E[i]; // speichere E[i]
5     for (j = i; j > 0 && E[j-1] > v; j--) {
6       E[j] = E[j-1]; // schiebe Element j-1 nach rechts
7     }
8     E[j] = v; // füge E[i] an der richtigen Stelle ein
9   }
10 }

```

- ▶ Insertionsort ist **in-place**, d.h. der Algorithmus arbeitet ohne zusätzlichen Speicherplatz.
- ▶ Insertionsort ist **stabil**, da die Reihenfolge der gleichwertigen Arrayelemente unverändert bleibt.

## Sortieren durch Einfügen – Insertionsort



- ▶ Durchlaufen des (unsortierten) Arrays von links nach rechts.
- ▶ Gehe zum ersten bisher noch nicht berücksichtigte Element.
- ▶ Füge es im sortierten Teil (links) nach elementweisem Vergleichen ein.
- ▶ Dieser Algorithmus funktioniert auch mit anderen linearen Anordnungen, etwa [Listen](#).

## Insertionsort – Best- und Worst-Case-Analyse

### Best-Case

- ▶ Im Best-Case ist das Array bereits sortiert.
  - ▶ Pro Element ist daher nur ein Vergleich nötig.
- ⇒ Es gilt:  $B(n) = n - 1 \in \Theta(n)$

### Worst-Case

- ▶ Im Worst-Case wird das einzusortierende Element immer ganz vorne eingefügt.
  - ▶ Es muss **mit allen vorhergehenden** Elementen verglichen werden.
  - ▶ Das tritt etwa auf, wenn das Array umgekehrt vorsortiert war.
- ⇒ Zum Einsortieren des  $i$ -ten Elements sind im schlimmsten Fall  $i$  Vergleiche nötig:  $W(n) = \sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{n \cdot (n-1)}{2} \in \Theta(n^2)$

## Insertionsort – Average-Case-Analyse (I)

### Annahmen für die Average-Case-Analyse

- ▶ Alle Permutationen von Elementen treten in gleicher Häufigkeit auf.
- ▶ Die zu sortierenden Elemente sind alle verschieden.

Es gilt:

$$A(n) = \sum_{i=1}^{n-1} \text{erwartete Anzahl an Vergleichen, um } E[i] \text{ einzusortieren}$$

Die erwartete Anzahl an Vergleichen, um den richtigen Platz für  $E[i]$  zu finden wird dann wie folgt hergeleitet:

## Insertionsort – Average-Case-Analyse (III)

Damit gilt für  $A(n)$ :

$$A(n) = \sum_{i=1}^{n-1} \left( \frac{i}{2} + 1 - \frac{1}{i+1} \right)$$

Auseinanderziehen  
und Indexverschiebung

$$= \frac{n \cdot (n-1)}{4} + (n-1) - \sum_{i=2}^n \frac{1}{i}$$

| Verschieben des Summenstarts

$$= \frac{n \cdot (n-1)}{4} + n - \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}$$

Harmonische Reihe:  $\sum_{i=1}^n (1/i) \approx \ln n$

$$A(n) \approx \frac{n \cdot (n-1)}{4} + n - \ln n \in \Theta(n^2)$$

## Insertionsort – Average-Case-Analyse (II)

$$\sum_{j=0}^i \Pr \left\{ \begin{array}{l} i\text{-tes Element wird} \\ \text{an Position } j \text{ eingefügt} \end{array} \right\} \cdot \text{Anzahl Vergleiche, um } E[i] \text{ an Position } j \text{ einzufügen}$$

$E[i]$  wird an beliebiger Position  $j$   
mit gleicher W'lichkeit eingefügt

$$= \sum_{j=0}^i \frac{1}{i+1} \cdot \text{Anzahl Vergleiche, um } E[i] \text{ an Position } j \text{ einzufügen}$$

Anzahl Vergleiche, um an Position 0  
einzufügen ist  $i$ , sonst  $i-j+1$ .

$$= \frac{1}{i+1} \cdot i + \frac{1}{i+1} \cdot \sum_{j=1}^i (i-j+1)$$

| Vereinfachen

$$= \frac{i}{i+1} + \frac{1}{i+1} \cdot \sum_{j=1}^i j = \frac{i}{i+1} + \frac{1}{i+1} \cdot \frac{i \cdot (i+1)}{2} = \frac{i}{2} + 1 - \frac{1}{i+1}$$

## Übersicht

- 1 Sortieren - Einführung
  - Bedeutung des Sortierens
  - Dutch National Flag Problem
- 2 Sortieren durch Einfügen
- 3 Mergesort
  - Das Divide-and-Conquer Paradigma
  - Mergesort
- 4 Effizienteres Sortieren?

## Divide-and-Conquer

**Teile-und-Beherrsche** Algorithmen (divide-and-conquer) teilen das Problem in mehrere Teilprobleme auf, die dem Ausgangsproblem ähneln, jedoch von kleinerer Größe sind.

Sie lösen die Teilprobleme **rekursiv** und kombinieren diese Lösungen dann, um die Lösung des eigentlichen Problems zu erstellen.

Das Paradigma von Teile-und-Beherrsche umfasst 3 Schritte auf jeder Rekursionsebene:

**Teile** das Problem in eine Anzahl von Teilproblemen auf.

**Beherrsche** die Teilprobleme durch rekursives Lösen. Hinreichend kleine Teilprobleme werden direkt gelöst.

**Verbinde** die Lösungen der Teilprobleme zur Lösung des Ausgangsproblems.

## Mergesort – Algorithm

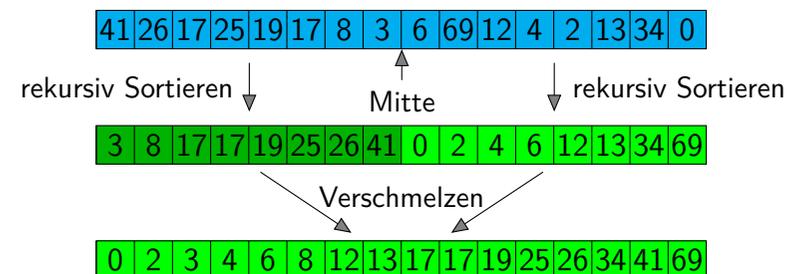
```

1 void mergeSort(int E[], int left, int right) {
2   if (left < right) {
3     int mid = (left + right) / 2; // finde Mitte
4     mergeSort(E, left, mid);    // sortiere linke Hälfte
5     mergeSort(E, mid + 1, right); // sortiere rechte Hälfte
6     // Verschmelzen der sortierten Hälften
7     merge(E, left, mid, right);
8   }
9 }
10 // Aufruf: mergeSort(E, 0, E.length-1);

```

► Verschmelzen kann man in Linearzeit. – Wie?

## Mergesort – Strategie

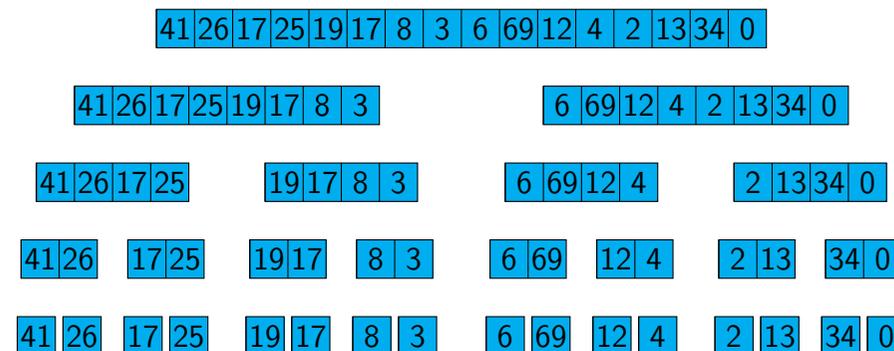


**Teile** das Array in zwei – möglichst gleichgroße – Hälften.

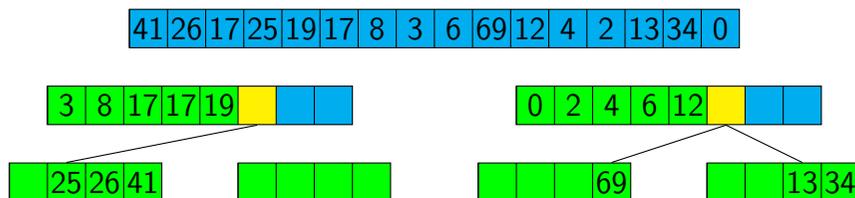
**Beherrsche:** Sortiere die Teile durch rekursive Mergesort-Aufrufe.

**Verbinde:** Mische je 2 sortierte Teilsequenzen zu einem einzigen, sortierten Array.

## Mergesort – Animation



## Mergesort – Animation



## Mergesort – Analyse

### Worst-Case

Wir erhalten:

$$W(n) = W(\lfloor n/2 \rfloor) + W(\lceil n/2 \rceil) + n - 1 \quad \text{mit} \quad W(1) = 0.$$

Mit Hilfe des Mastertheorems ergibt sich:  $W(n) \in \Theta(n \cdot \log n)$ .

### Best-Case, Average-Case

Das Worst-Case-Ergebnis gilt genauso im Best-Case, und damit auch im Average-Case:  $W(n) = B(n) = A(n) \in \Theta(n \cdot \log n)$ .

### Speicherbedarf

$\Theta(n)$  für die Kopie des Arrays beim Mergen.  $\Theta(\log n)$  für den Stack.

- ▶ Mergesort ist **nicht** in-place.
- ▶ Mit **zusätzlichen** Verschiebungen ist die Kopie des Arrays nicht nötig.

## Mergesort – Verschmelzen in Linearzeit

```

1 void merge(int E[], int left, int mid, int right) {
2   int a = left, b = mid + 1;
3   int Eold[] = E;
4   for (; left <= right; left++) {
5     if (a > mid) { // Wir wissen (Widerspruch): b <= right
6       E[left] = Eold[b];
7       b++;
8     } else if (b > right || Eold[a] <= Eold[b]) { // stabil: <=
9       E[left] = Eold[a];
10      a++;
11     } else { // Eold[a] > Eold[b]
12       E[left] = Eold[b];
13       b++;
14     }
15   }
16 }

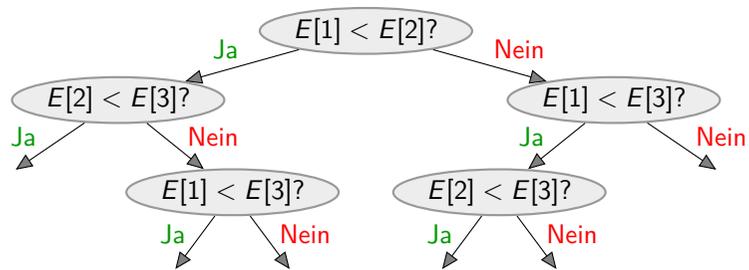
```

- ▶ Mergesort ist **stabil** (vgl. Zeile 8), d. h. die Reihenfolge von Elementen mit *gleichem* Schlüssel bleibt erhalten.

## Übersicht

- 1 Sortieren - Einführung
  - Bedeutung des Sortierens
  - Dutch National Flag Problem
- 2 Sortieren durch Einfügen
- 3 Mergesort
  - Das Divide-and-Conquer Paradigma
  - Mergesort
- 4 Effizienteres Sortieren?

## Wie effizient kann man sortieren? (I)



Betrachte vergleichsbasierte Sortieralgorithmen als **Entscheidungsbaum**:

- ▶ Dieser beschreibt die Abfolge der durchgeführten Vergleiche.
- ▶ Sortieren verschiedener Eingabepermutationen ergibt also verschiedene Pfade im Baum.

## Wie effizient kann man sortieren? (II)

### Theorem

Vergleichsbasiertes Sortieren benötigt im Worst-Case **mindestens**  $O(n \log n)$  Vergleiche.

### Beweis.

Es gilt:

- ▶ Anzahl Vergleiche im Worst-Case = Länge des längsten Pfades = **Baumhöhe  $k$** .
- ▶ Da wir binäre Vergleiche verwenden, ergibt sich ein **Binärbaum** mit  $n!$  Blättern.

⇒ Mit  $n! \leq 2^k$  erhält man  $k \geq \lceil \log(n!) \rceil$  **Vergleiche** im Worst-Case.

Da  $\lceil \log(n!) \rceil \approx n \cdot \log n - 1.4 \cdot n$  geht es **nicht besser als  $O(n \cdot \log n)$** ! □