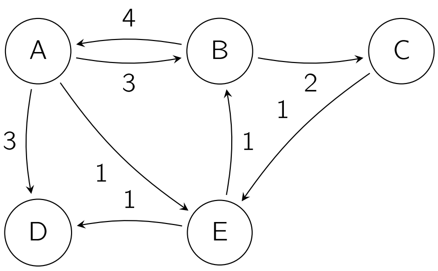
Prof. Dr. Ir. Joost-Pieter Katoen

Christian Dehnert, Friedrich Gretz, Benjamin Kaminski, Thomas Ströder

Tutoraufgabe 1 (Floyd-Warshall):

Betrachten Sie den folgenden Graphen:



Führen Sie den *Algorithmus von Floyd* auf diesem Graphen aus. Geben Sie dazu nach jedem Durchlauf der äußeren Schleife die aktuellen Entfernungen in einer Tabelle an. Die erste Tabelle enthält bereits die Adjazenzmatrix nach Bildung der reflexiven Hülle.Der Eintrag in der Zeile i und Spalte j ist also ∞, falls es keine Kante vom Knoten der Zeile i zu dem Knoten der Spalte j gibt, und sonst das Gewicht dieser Kante. Beachten Sie, dass in der reflexiven Hülle jeder Knoten eine Kante mit Gewicht 0 zu sich selbst hat.

1	A	B	C	D	E
A	0	3	∞	3	1
B	4	0	2	∞	∞
C	∞	∞	0	∞	1
D	∞	∞	∞	0	∞
E	∞	1	∞	1	0

2	A	B	C	D	E
A					
B					
C					
D					
E					

3	A	B	C	D	E
A					
B					
C					
D					
E					

4	A	B	C	D	E
A					
B					
C					
D					
E					

5	A	B	C	D	E
A					
B					
C					
D					
E					

6	A	B	C	D	E
A					
B					
C					
D					
E					

Lösung:

1	A	B	C	D	E
A	0	3	∞	3	1
B	4	0	2	∞	∞
C	∞	∞	0	∞	1
D	∞	∞	∞	0	∞
E	∞	1	∞	1	0

2	A	B	C	D	E
A	0	3	∞	3	1
B	4	0	2	7	5
C	∞	∞	0	∞	1
D	∞	∞	∞	0	∞
E	∞	1	∞	1	0

3	A	B	C	D	E
A	0	3	5	3	1
B	4	0	2	7	5
C	∞	∞	0	∞	1
D	∞	∞	∞	0	∞
E	5	1	3	1	0

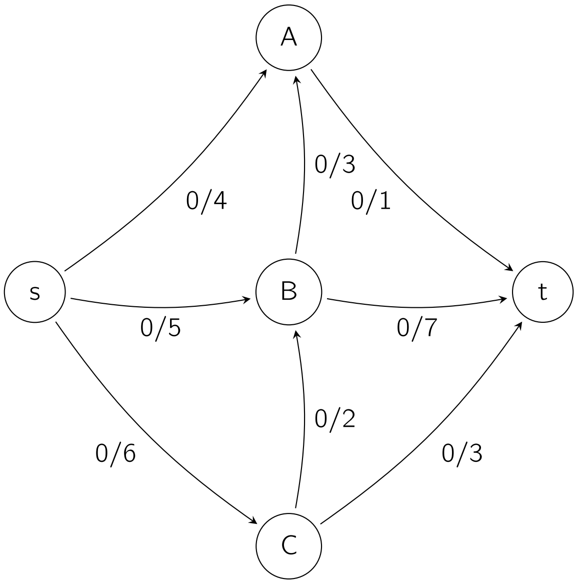
4	A	B	C	D	E
A	0	3	5	3	1
B	4	0	2	7	3
C	∞	∞	0	∞	1
D	∞	∞	∞	0	∞
E	5	1	3	1	0

5	A	B	C	D	E
A	0	3	5	3	1
B	4	0	2	7	3
C	∞	∞	0	∞	1
D	∞	∞	∞	0	∞
E	5	1	3	1	0

6	A	B	C	D	E
A	0	2	4	2	1
B	4	0	2	4	3
C	6	2	0	2	1
D	∞	∞	∞	0	∞
E	5	1	3	1	0

Tutoraufgabe 2 (Ford-Fulkerson):

Betrachten Sie das folgende Flussnetzwerk mit Quelle s und Senke t:

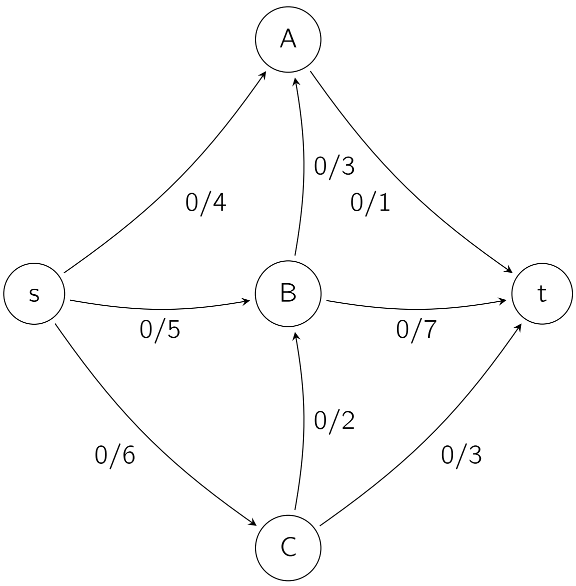


Berechnen Sie den maximalen Fluss in diesem Netzwerk mithilfe der *Ford-Fulkerson Methode*. Geben Sie dazu *jedes Restnetzwerk (auch das initiale)* sowie *nach jeder Augmentierung* den aktuellen Zustand des Flussnetzwerks an. Geben Sie außerdem den *Wert des maximalen Flusses* an. Die vorgegebene Anzahl an Lösungsschritten muss nicht mit der benötigten Anzahl solcher Schritte übereinstimmen.

Lösung:

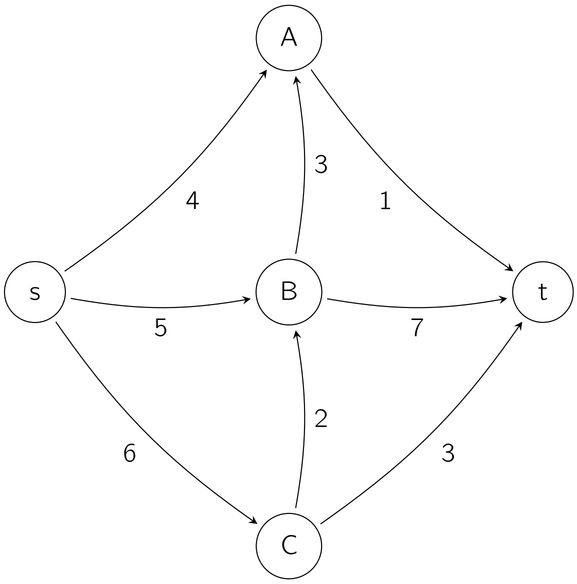
Schritt 0:

Initiales Flussnetzwerk:



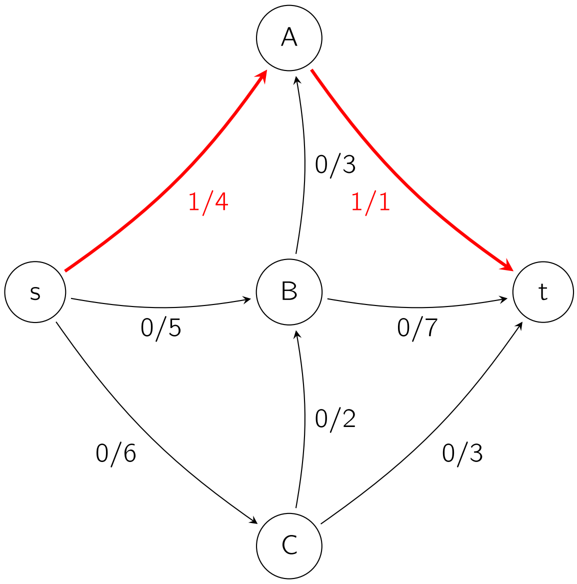
Schritt 1:

Restnetzwerk:



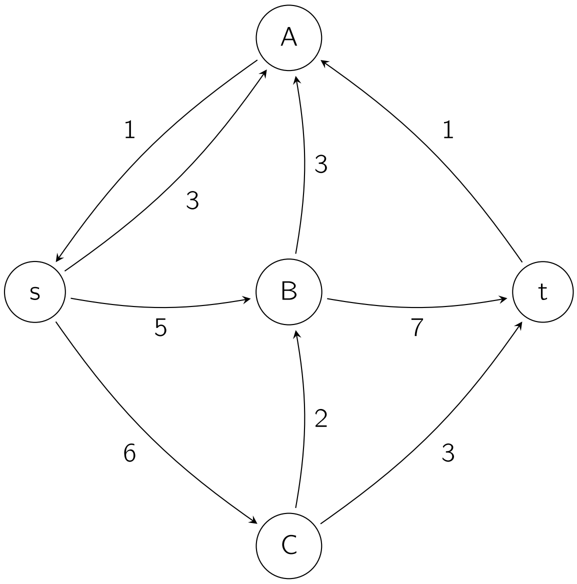
Schritt 2:

Nächstes Flussnetzwerk mit aktuellem Fluss:



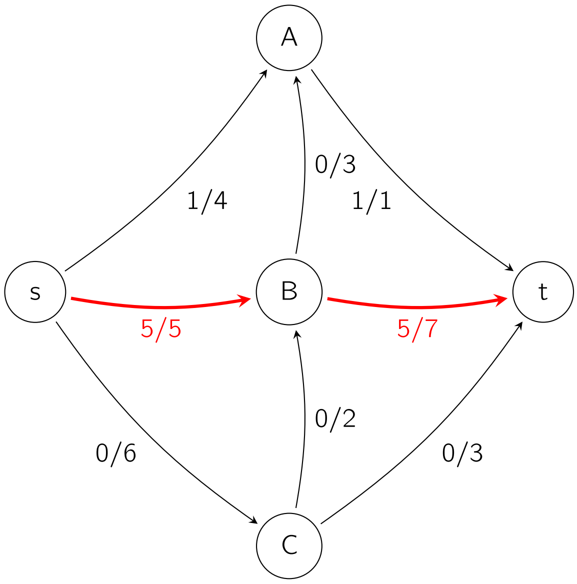
Schritt 3:

Restnetzwerk:



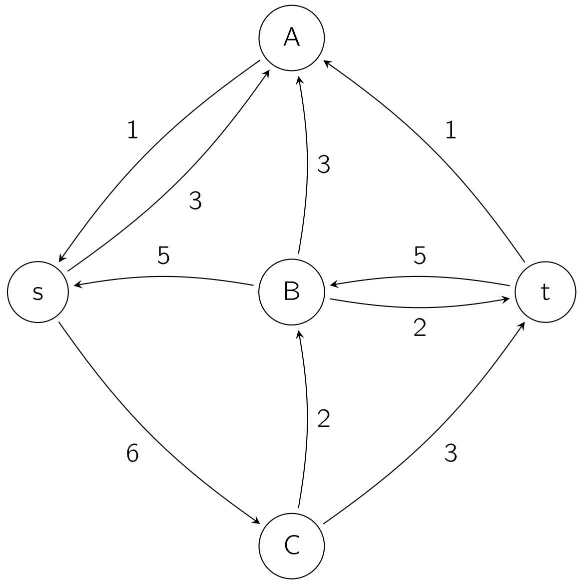
Schritt 4:

Nächstes Flussnetzwerk mit aktuellem Fluss:



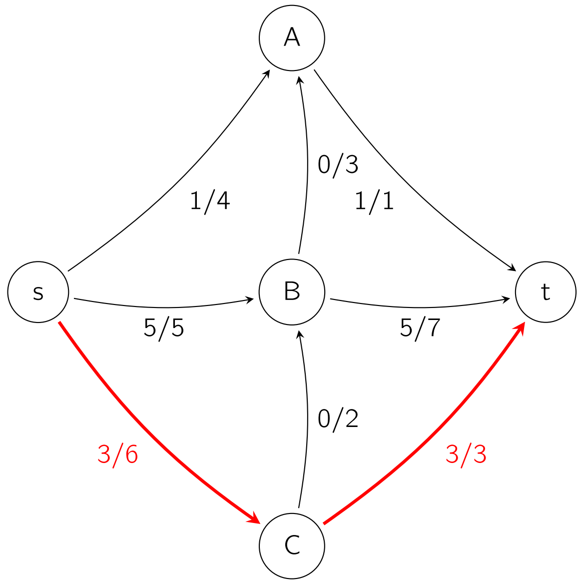
Schritt 5:

Restnetzwerk:



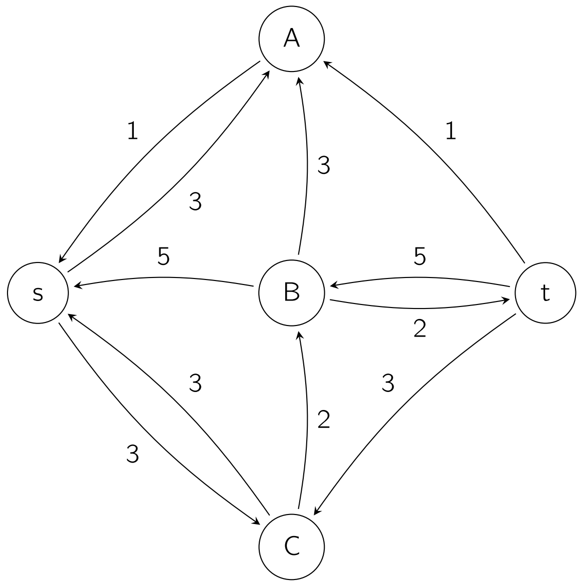
Schritt 6:

Nächstes Flussnetzwerk mit aktuellem Fluss:



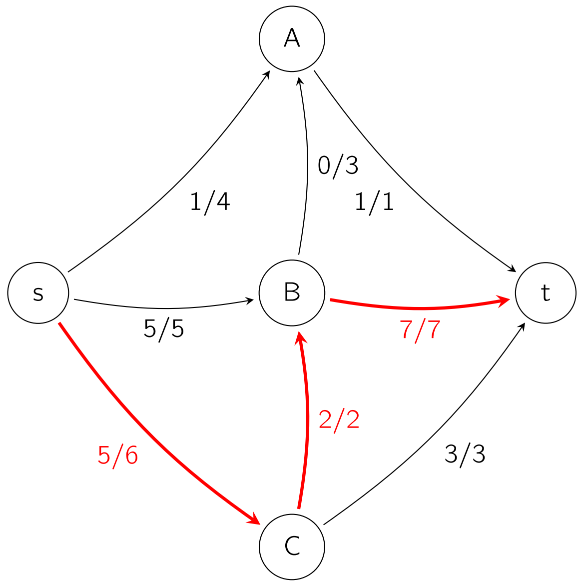
Schritt 7:

Restnetzwerk:



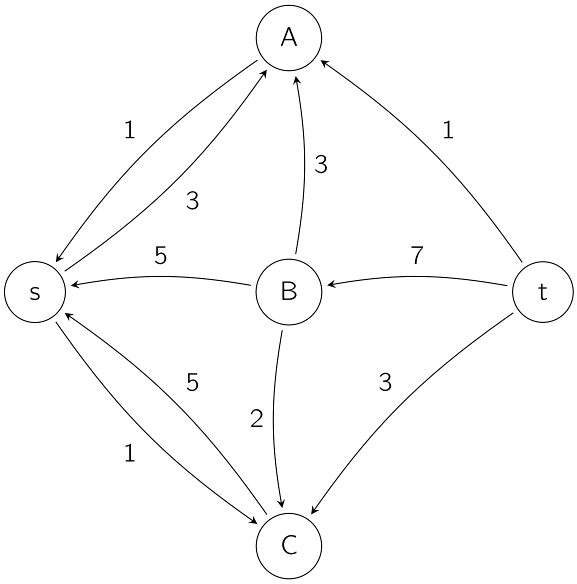
Schritt 8:

Nächstes Flussnetzwerk mit aktuellem Fluss:



Schritt 9:

Restnetzwerk:

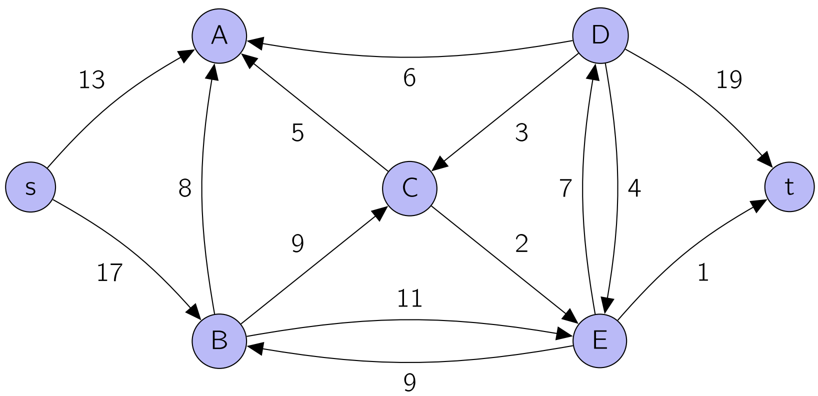


Der maximale Fluss hat den Wert: 11

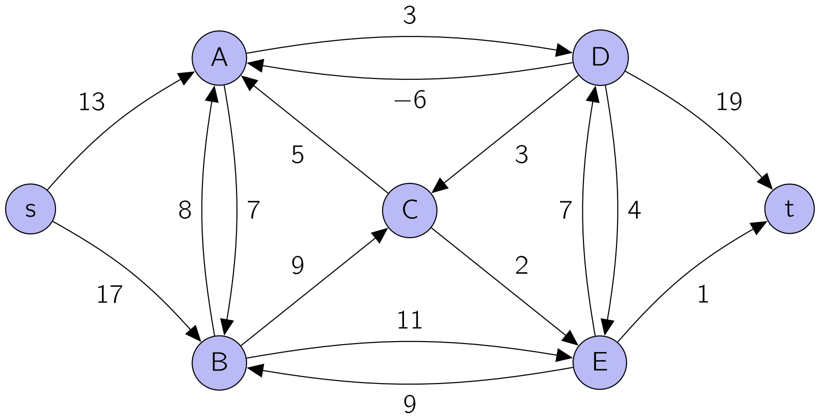
Tutoraufgabe 3 (Flussnetzwerke):

Untersuchen Sie, ob es sich bei den folgenden Graphen um Flussnetzwerke handelt.

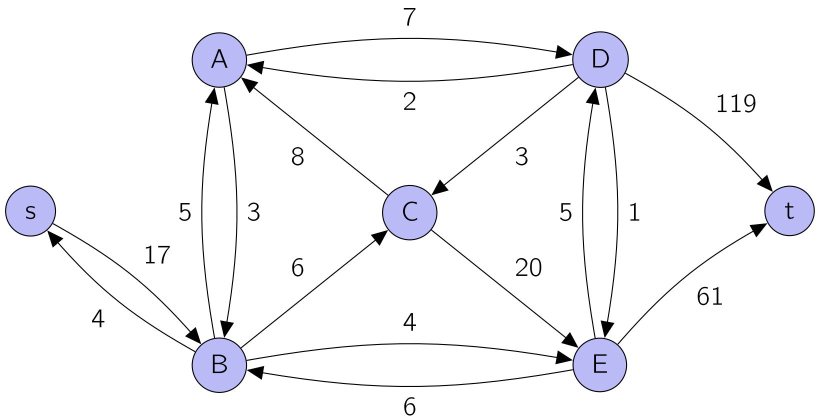
a)



b)



c)



Lösung:

a) Bei diesem Graphen handelt es sich *nicht* um ein Flussnetzwerk, da der Knoten A nicht auf einem Pfad von der Quelle zur Senke liegt.

b) Bei diesem Graphen handelt es sich *nicht* um ein Flussnetzwerk, da die Kante (D, A) eine negative Kapazität, nämlich -6, hat.

c) Bei diesem Graphen handelt es sich um ein Flussnetzwerk, da alle Kapazitäten nichtnegativ sind, lediglich vorhandene Kanten mit einer Kapazität ungleich 0 versehen sind, und alle Knoten auf einem Pfad von der Quelle zur Senke liegen.

Tutoraufgabe 4 (Eigenschaften von Flüssen):

Beweisen Sie die folgenden Aussagen über einen Fluss f und ein Flussnetzwerk $G(V, E, c)$ mit Quelle s und Senke t:

a) Für alle $X, Y \subseteq V$ gilt:

$$f(X, Y) = -f(Y, X)$$

b) Für alle $X, Y, Z \subseteq V$ mit $X \cap Y = \emptyset$ gilt:

$$f(X \cup Y, Z) = f(X, Z) + f(Y, Z)$$

c) Sei (S,T) ein Schnitt über G, so gilt:

$$f(S, T) = |f|$$

d) Sei (S,T) ein Schnitt über G, so gilt:

$$|f| \leq c(S, T)$$

Lösung:

Die folgenden Aussagen waren zu beweisen:

a) Für alle $X, Y \subseteq V$ gilt: $f(X, Y) = -f(Y, X)$

$$\begin{aligned} f(X, Y) &= \sum_{x \in X} \sum_{y \in Y} f(x, y) \\ &= \sum_{x \in X} \sum_{y \in Y} -f(y, x) \\ &= -\sum_{x \in X} \sum_{y \in Y} f(y, x) \\ &= -\sum_{y \in Y} \sum_{x \in X} f(y, x) \\ &= -f(Y, X) \end{aligned}$$

b) Für alle $X, Y, Z \subseteq V$ mit $X \cap Y = \emptyset$ gilt:

$$f(X \cup Y, Z) = f(X, Z) + f(Y, Z)$$

$$\begin{aligned} f(X \cup Y, Z) &= \sum_{x \in X \cup Y} \sum_{y \in Z} f(x, y) && \mid X \cap Y = \emptyset \\ &= \sum_{x \in X} \sum_{y \in Z} f(x, y) + \sum_{x \in Y} \sum_{y \in Z} f(x, y) \\ &= f(X, Z) + f(Y, Z) \end{aligned}$$

c) Sei (S,T) ein Schnitt über G, so gilt: $f(S, T) = |f|$

$$\begin{aligned} f(S, T) &= f(S, V) - f(S, V - T) && \mid f(S, V) = f(S, T) + f(S, V - T) \text{ mit } S \cup T = V \\ &= f(S, V) - f(S, S) && \mid f(X, X) = 0 \\ &= f(S, V) && \mid f(X \cup Y, Z) = f(X, Z) + f(Y, Z) \\ &= f(s, V) + f(S - \{s\}, V) && \mid \text{Flusserhaltung} \\ &= f(s, V) = |f| \end{aligned}$$

d) Sei (S,T) ein Schnitt über G, so gilt: $|f| \leq c(S,T)$

$$\begin{aligned} |f| &= f(S,T) \\ &= \sum_{x \in S} \sum_{y \in T} f(x,y) \\ &\leq \sum_{x \in S} \sum_{y \in T} c(x,y) \\ &= c(S,T) \end{aligned}$$